Lappskrivning 1, version A,
i SF1633 Differentialekvationer I.
fredag 9 september 2016, klockan 10.15–12.00

LÖSNINGSFÖRSLAG

1) Lösning

Vi ser att DE'n, kan förenklas till

$$y'(x) = 12 + 4x + 3y^2 + xy^2 = (4 + y^2)(3 + x) \tag{1}$$

alltså är den separabel och vi får

$$\int \frac{dy}{4 + y^2} = \int (3 + x)dx \Longrightarrow \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{y}{2}\right) = 3x + x^2/2 + C_1 \tag{2}$$

Vi vet att

$$\tan\left(\arctan\left(\frac{y}{2}\right)\right) = \frac{y}{2} \Longrightarrow y = 2\tan(6x + x^2 + 2C_1) \tag{3}$$

som är den allmänna lösningen till problemet. Insättning av begynnelsevillkoret $y(0) = 0$ ger $0 = 2C_1$ alltså blir slutsvaret

$$\boxed{y(x) = 2\tan(6x + x^2)}$$

2) Lösning

Problemet löses m h a integrerande faktorn $\mu(x)$, men då måste DE'n skrivas först på standardformen

$$y' + \frac{3}{x}y = \mathrm{e}^{2x}/x^2 \tag{4}$$

efter division med x^2. Inga problem: $x > 0$ p g a begynnelsevillkoret! Då blir

$$\mu(x) = \int \mathrm{e}^{3/x}dx = \mathrm{e}^{3\ln|x|} = |x|^3$$

Detta leder till

$$(\mu y)' = x^3\mathrm{e}^{2x}/x^2 = x\mathrm{e}^{2x} \tag{5}$$

Integration, eller BETA, ger

$$\mu y = \int x\mathrm{e}^{2x}dx = x\mathrm{e}^{2x}/2 - \mathrm{e}^{2x}/4 + C. \tag{6}$$

som resulterar i den allmänna lösningen

$$\boxed{y(x) = \mathrm{e}^{2x}\left(1/2x^2 - 1/4x^3\right) + C/x^3}$$

Insättning av begynnelsevillkoret $y(1) = 0$ ger $0 = (1/2 - 1/4)\mathrm{e}^2 + C$ alltså $C = -\mathrm{e}^2/4$ och slutsvaret blir

$$\boxed{y(x) = \mathrm{e}^{2x}(1/2x^2 - 1/4x^3) - \mathrm{e}^2/4x^3}$$

Det största intervall som innehåller $x = 1$ är $x > 0$.

---

3) Lösning

---

a) Vi får de kritiska punkterna, konstanta lösningarna, av

$$\frac{dP(t)}{dt} = 0,5(2 - P)(4 - P) = 0 \tag{7}$$

m a o $P = 2$ och $P = 4$. Teckenstudie av $P'(t)$, ekv(7), visar att $P = 2$ är en attraktor, stabilt, och $P = 4$ är en repeller, instabilt.

b) Lösningsdiagram