KTH Matematik B

Lappskrivning 1, version B,
i SF1633 Differentialekvationer I.
fredag 9 september 2016, klockan 10.15–12.00

LÖSNINGSFÖRSLAG

1) Lösning

Man ser att HL i DE'n kan skrivas om så att vi får

$$y'(x) = (1+x^2)(1+y^2)$$

som indikerar att här finns inga konstanta lösningar.
Variabelseparation ger sambandet

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int (1+x^2)dx$$

Vi vet, eller hittar i Beta,

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \arctan(y)$$

och

$$\int (1+x^2)dx = x + \frac{x^3}{3} + C$$

alltså får vi

$$\arctan(y) = x + \frac{x^3}{3} + C$$

Insättning av begynnelsevillkoret $y(0) = 1$ ger

$$C = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Vi får först

$$\arctan(y) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{4}$$

som resulterar i svaret

$$\boxed{y = \tan\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

2) Lösning

Problemet löses m h a integrerande faktorn $\mu(x)$, men då måste DE'n skrivas först på standardformen

$$y' + \frac{4}{x}y = \frac{e^{3x}}{x^3} \tag{1}$$

efter division med x^3. Inga problem: $x > 0$ p g a begynnelsevillkoret! Då blir

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{\int (4/x)dx} = \mathrm{e}^{4\ln|x|} = |x|^4$$

Detta leder till

$$(\mu y)' = x^4 \frac{\mathrm{e}^{3x}}{x^3} = x\mathrm{e}^{3x} \tag{2}$$

Partiell integration, eller BETA, ger

$$\mu y = \int x\mathrm{e}^{3x} dx = \ldots = \frac{x\mathrm{e}^{3x}}{3} - \frac{\mathrm{e}^{3x}}{9} + C. \tag{3}$$

som resulterar i den allmänna lösningen

$$\boxed{y(x) = \mathrm{e}^{3x}\left(\frac{1}{3x^3} - \frac{1}{9x^4}\right) + \frac{C}{x^4}}$$

Insättning av begynnelsevillkoret $y(1) = 0$ ger $0 = (1/3 - 1/9)\mathrm{e}^3 + C$ alltså $C = -2\mathrm{e}^3/9$ och slutsvaret blir

$$\boxed{y(x) = \mathrm{e}^{3x}\left(\frac{1}{3x^3} - \frac{1}{9x^4}\right) - \frac{2\mathrm{e}^3}{9x^4}}$$

Det största intervall som innehåller $x = 1$ är $x > 0$.

---

3) Lösning

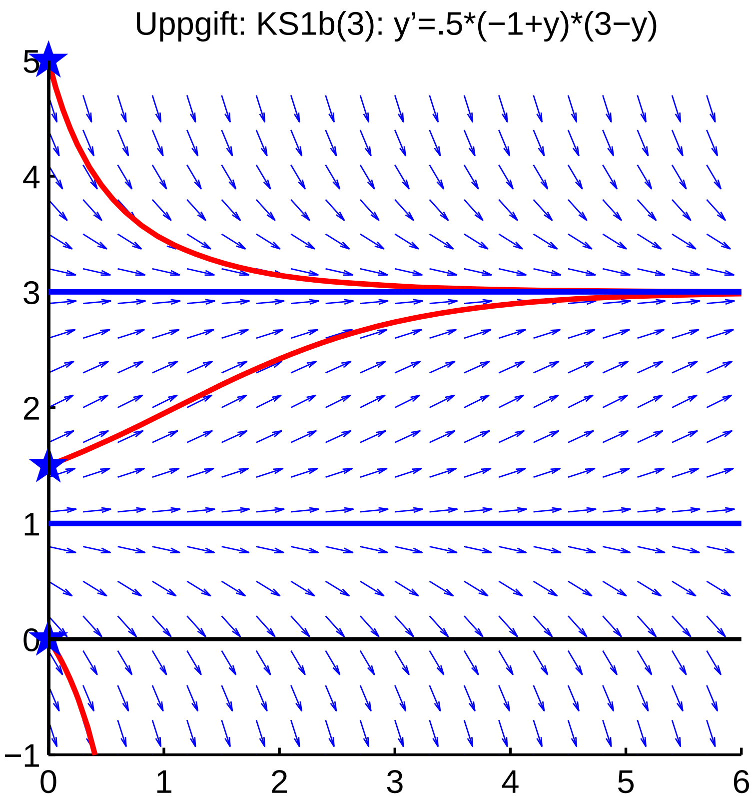
---

a) Vi får de kritiska punkterna, konstanta lösningarna, av

$$\frac{dP(t)}{dt} = -0.5(1 - P)(3 - P) = 0 \tag{4}$$

m a o $P = 1$ och $P = 3$. Teckenstudie av $P'(t)$, ekv(**??**), visar att $P = 1$ är en repeller, instabilt, och $P = 3$ är en attraktor, stabilt.

b) Lösningsdiagram


Uppgift: KS1b(3): y'=.5*(−1+y)*(3−y)
5
4
3
2
1
0
−1
0
1
2
3
4
5
6