

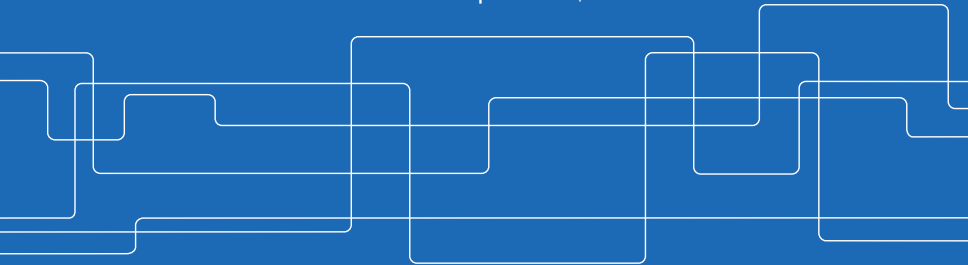


Föreläsning 6

Reglerteknik AK

©Bo Wahlberg
Avdelningen för Reglerteknik, KTH

14 september, 2016

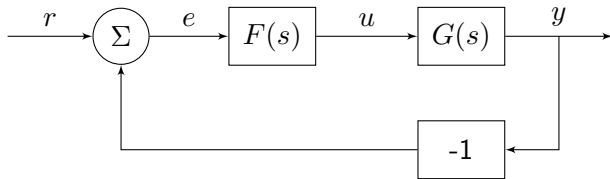




Introduktion

Förra gången:

- Regulatorkonstruktion



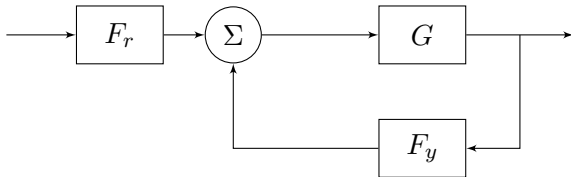
Målet är att bestämma F så att $y \approx r$.
Systematisk PID/Lead-lag konstruktion

Dagens program:

- Känslighet och robusthet



Känslighet och robusthet



Om $F_r = F_y = F \Rightarrow$ tidigare schema.

Många val av F_r och F_y ger samma slutna system.



Example

1. Med $F_r = F_y = F$ fås

$$\implies G_c = \frac{GF}{1 + GF}$$

2. Med öppen styrning ($F_y = 0$) och $F_r = \frac{F}{1+GF}$ fås

$$\implies G_c = \frac{GF}{1 + GF}$$



Känslighet och robusthet

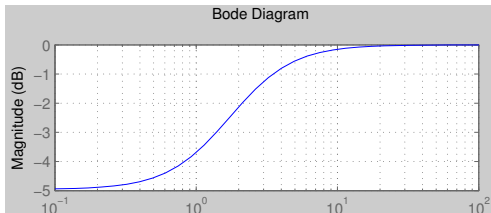
Fördelar med återkoppling:

- Återkoppling minskar inverkan av störningar

$$Y = \frac{GF_r}{1 + GF_y} R + \underbrace{\frac{1}{1 + GF_y}}_{\text{känslighetsfunktionen}} V$$

$$S(s) = \frac{1}{1 + G(s)F_y(s)}$$

Vi får liten inverkan av störningar med frekvenser där $|S(i\omega)|$ är liten.





Känslighet

Om kretsförstärkningen $|F_y(i\omega)G(i\omega)|$ är stor

\Leftrightarrow

känslighetsfunktionen $|S(i\omega)|$ är liten.

Example

$$F_y(s) = K \left[1 + \frac{1}{T_I} \frac{1}{s} \right]$$

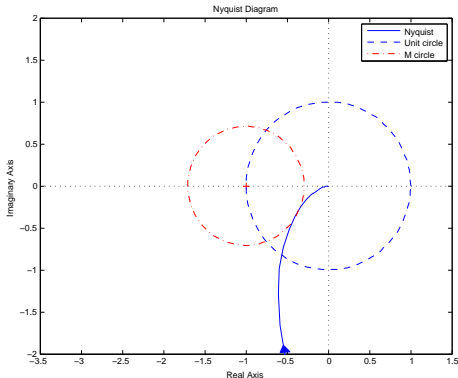
$$\Rightarrow |S(0)| = 0$$

dvs. PI-reglering eliminerar inverkan av stegstörningar i stationärt tillstånd.



$$|S(i\omega)| = \left| \frac{1}{1 + G(i\omega)F_y(\omega)} \right| \leq M_s \Leftrightarrow |G(i\omega)F_y(\omega) - (-1)| \geq \frac{1}{M_s}$$

Nyquistkurvan måste vara utanför en cirkel med mittpunkt i -1 och radie $1/M_s$





Robusthet

- Återkoppling minskar inverkan av vissa typer av modellfel

Modell: $G(s)$

Verklighet: $G^0(s) = G(s)[1 + \Delta G(s)]$

Vi kan lösa ut $\Delta G(s) = \frac{G^0(s) - G(s)}{G(s)}$ och ser att det är ett *relativt fel*.

Vad händer då man återkopplar det **verkliga** systemet?



Robusthet

Återkopplar vi det **verkliga** systemet får vi:

$$Y^0 = \frac{G^0 F_r}{1 + G^0 F_y} R = \dots = [1 + S^0 \Delta G] Y$$

$$\Rightarrow \Delta Y = \frac{Y^0 - Y}{Y} = S^0 \Delta G$$

där $S^0(s) = \frac{1}{1 + G^0(s) F_y(s)}$.

Modellfel, $\Delta G(i\omega)$, får liten inverkan

om den **verkliga känslighetsfunktionen** $|S^0(i\omega)|$ är liten.



Example

PI-reglering $\Rightarrow S^0(0) = 0$

Eliminerar inverkan av felaktig statisk förstärkning, $G^0(0)$.

Vid "små" modellfel har vi att

$$S^0 \approx S = \frac{1}{1 + GF}$$

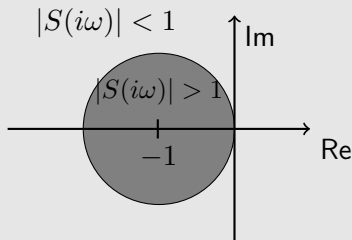
Example

För fallet $F_y = F_r = F$ fås

$$G_c(s) + S(s) = \underbrace{\frac{G(s)F(s)}{1 + G(s)F(s)}}_{\approx 1} + \underbrace{\frac{1}{1 + G(s)F(s)}}_{\Rightarrow \approx 0} = 1$$

Bra val!

Nyquistdiagram och $S(i\omega)$ (jmf M_s -cirkeln):





Känslighet och robusthet

Nackdelar med återkoppling:

- Hög krets förstärkning ökar risken för instabilitet, speciellt vid modellfel (robusthet)
- Kräver eventuellt stora styrsignaler.

$$U = -\frac{F_y}{1 + GF_y}V \approx -\frac{1}{G}V$$

om GF_y är stor.

Krävs en stor styrsignal för att eliminera störningar i frekvensband där $|G(i\omega)|$ är liten.

- Mätbrus (fel)!



Bodes Integral (1945)

Theorem (Bodes Integral)

Om G_0 har ett relativt gradtal ≥ 2 gäller att

$$\int_0^{\infty} \log |S(i\omega)| d\omega = \pi(p_1 + \dots + p_m)$$

där p_1, \dots, p_m är polerna till $G_0(s)$ i H.H.P.

Observera att detta är oberoende av regulator.

Beviset bygger på integration av

$$\log S(i\omega) = \underbrace{\log |S(i\omega)|}_{\text{jämn fkn}} + i \underbrace{\arg S(i\omega)}_{\text{udda fkn}}$$



Robusthet

Modell: $G(s)$, antag stabil

Verklighet: $G^0(s) = G(s)[1 + \Delta_G(s)]$, antag stabil

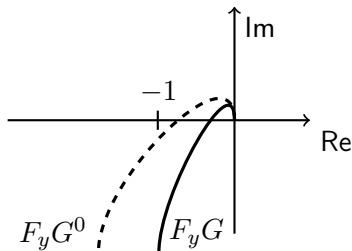
Nominellt återkopplat system: $\frac{GF_r}{1+GF_y}$, antag stabilt

Fråga: Är det verkliga återkopplade systemet stabilt?



Robusthet

För att svara på denna fråga kan vi bland annat använda Nyquistkriteriet.



$$F_y G^0 = F_y G [1 + \Delta_G] = F_y G + F_y G \Delta_G$$

Kravet är att $F_y G^0$ ej får omsluta -1.

OK om avståndet mellan $F_y G$ och $F_y G^0$ är mindre än avståndet mellan $F_y G$ och -1.



Robusthet

Detta ger kravet att

$$\begin{aligned} |F_y(i\omega)G^0(i\omega) - F_y(i\omega)G(i\omega)| &< |F_y(i\omega)G(i\omega) - (-1)| \\ \Rightarrow |F_y(i\omega)G(i\omega)\Delta_G(i\omega)| &< |F_y(i\omega)G(i\omega) + 1| \end{aligned}$$

Som omformulerat ger det så kallade **Robusthetskriteriet** från 1978

$$\Rightarrow \boxed{\frac{|F_y(i\omega)G(i\omega)|}{|1 + F_y(i\omega)G(i\omega)|} < \frac{1}{|\Delta_G(i\omega)|} \quad \forall \omega}$$



Robusthet

Definera den komplementära känslighetsfunktionen:

$$T(s) = \frac{F_y(s)G(s)}{1 + F_y(s)G(s)} = 1 - S(s)$$

Normalt är Δ_G ej känd, men en övre uppskattning är given

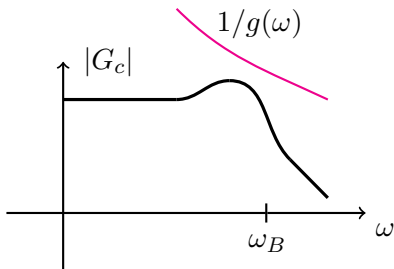
$$|\Delta_G(i\omega)| \leq g(\omega) \quad \forall \omega$$

Det verkliga slutna systemet är då stabilt om

$$|T(i\omega)| < \frac{1}{g(\omega)} \quad \forall \omega$$

Vilket är ett tillräckligt villkor, men ofta ej nödvändigt.

Observera att om $F_y = F_r = F$ så är $T = G_c$.



Begränsar möjlig bandbredd.



Example

Antag att

$$G^0(s) = G(s) \underbrace{\frac{\alpha}{s + \alpha}}_{1 + \Delta_G(s)}$$

Genom identifikation ser vi att

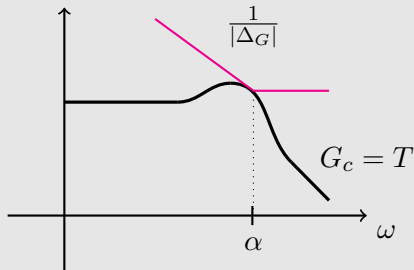
$$\Delta_G(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha} - 1 = -\frac{s}{s + \alpha}$$

och

$$\frac{1}{\Delta_G(s)} = -\frac{s + \alpha}{s}$$

har brytpunkter vid 0 (-1) och α (+1)

Example (fort.)



Desto långsammare försummad dynamik (α), desto lägre möjlig bandbredd.

Alternativt: Modellera bättre!