SF1625 Envariabelanalys

Föreläsning 9

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

16 september 2016

Homogena injära ODE m konst koeff

Sist: homogena linjära ODE med konstanta koefficienter.

Första ordningens sådan ekvation kan skrivas

$$y'(t) + ky(t) = 0$$

för någon konstant k.

Lösningen fås genom karaktäriskta ekvationen $r + k = 0$:

Kar ekv $r + k = 0$ har lösningen $r = -k$ så

$$y(t) = Ce^{-kt}, \quad C \text{ godtycklig konstant.}$$

Homogena injära ODE m konst koeff

Andra ordningens sådan ekvation kan skrivas

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

för några konstanter a, b, c.

Lösningen fås via karaktäristiska ekvationen $ar^2 + br + c = 0$. Vi får tre fall beroende på hur lösningarna r_1 och r_2 ser ut:

Fall 1. Om $r_1 \neq r_2$ är reella, så är allmänna lösningen till DE

$$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}, \quad A, B \text{ godt konst}$$

Fall 2. Om $r_1 = r_2$, reell, så är allmänna lösningen till DE

$$y(t) = (A + Bt)e^{r_1 t}, \quad A, B \text{ godt konst}$$

Fall 3. Om $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ så är allmänna lösningen till DE

$$y(t) = e^{\alpha t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t), \quad A, B \text{ godt konst}$$

Tillämpningsexempel

Diffekvationen $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$ kallas ibland svängningsekvationen. Olika val av konstanterna a och b beskriver olika typer av svängning.

Odämpad svängning beskrivs då $a > 0$, $b = 0$ och $c > 0$, dvs

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = 0$$

För positiva a, b och c skiljer man på dämpad svängning, kritiskt dämpad svängning och överdämpad svängning (se slutet av kap 3.7 i boken).

Nu ska vi lösa **inhomogena ekvationer,** dvs där höger led $\neq 0$. Exempel:

$$y'(t) + \frac{1}{2}y(t) = 3$$

För sådana gäller: Lösningens struktur är $y = y_h + y_p$ där y_h är allmän lösning till homogena ekvationen och y_p är någon partikulärlösning till given DE.

Som tidigare hittas $y_h = Ce^{-t/2}$

Ansätt (gissa) $y_p = a$ för något tal a. Då är $y_p'(t) + \frac{1}{2}y_p(t) = 3 \Leftrightarrow a = 6$. Vi får alltså $y_p = 6$

Allmänna lösningen till $y'(t) + \frac{1}{2}y(t) = 3$ är då $y(t) = Ce^{-t/2} + 6$, C godtycklig konstant.

.

Dagens tentaproblem. En mjölkförpackning med temperaturen 4° C tas ur kylskåpet och placeras i rumstemperatur. Efter 12 minuter har mjölken antagit temperaturen 12° C. Efter hur lång tid ytterligare har mjölkens temperatur nått 18° C?

Andra ordningens inhomogena ekvation

Ordning 2 följer samma princip. Exempel:

$$y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = 35$$

Lösningsgång:
Lösningens struktur är $y = y_h + y_p$ där y_h är allm lösn till den homogena ekvationen och y_p är någon part. lösn. till given DE.

Som förra gången fås $y_h(t) = e^t(A\cos 2t + B\sin 2t)$

Gissa (ansätt) $y_p = a$. Derivering och insättning i DE ger $5a = 35$ dvs $a = 7$. Vi har alltså $y_p = 7$

Allm lösn till DE är $y(t) = e^t(A\cos 2t + B\sin 2t) + 7$

Mer om inhomogena fallet

Lösningsgången för en **inhomogen** ekvation
$y'' + ay' + by = f(t)$ är som vi såg på förra bilden:
- Finn y_h
- Finn y_p (se kap 18.6 - ansätt y_p som liknar högerledet)
- Addera: $y = y_h + y_p$
- Bestäm ev konstanter med hjälp av villkoren.

Vid ansättning i steg 2 när man söker y_p ska man gissa att partikulärlösningen ser ut ungefär som högerledet. Om högerledet är ett polynom, ansätt ett polynom. Om högerledet är en exp-funktion, ansätt en exponentialfunktion. Om högerledet är sin eller cos, ansätt en kombination av sin och cos.

Vid ansättning av y_p får ingen term finnas med i y_h. Om någon term av y_p finns med i y_h - mulitplicera ansättningen med variabeln och försök igen.

Lös differentialekvationerna!

A. $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 8t$

B. $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^{t}$

C. $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^{-t}$

Resonans

Uppgift. Lös initialvärdesproblemet

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = \sin t \\ y(0) = 0, \;\; y'(0) = 0 \end{cases}$$

1. $y_h = C\cos t + D\sin t$, där C och D är godtyckliga konstanter.

2. $y_p = -\dfrac{t}{2}\cos t$.

3. Lösningen till DE är $y(t) = C\cos t + D\sin t - \dfrac{t}{2}\cos t$.

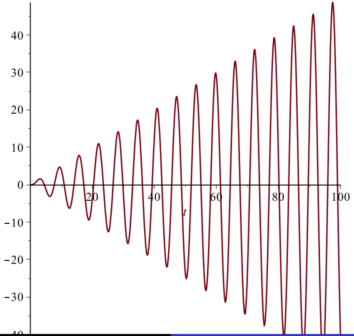
4. Lösningen till IVP är $y(t) = \dfrac{1}{2}\sin t - \dfrac{t}{2}\cos t$.

Uppgift. Initialvärdesproblemet

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = \sin t \\ y(0) = 0, \;\; y'(0) = 0 \end{cases}$$

har alltså lösningen

$$y(t) = \frac{1}{2}\sin t - \frac{t}{2}\cos t.$$



Resonans

https://www.youtube.com/watch?v=j-zczJXSxnw

Exponentialfunktionen

Exp. Det finns en funktion $\exp(x) = e^x$ som är definierad för alla x och har som värdemängd alla $y > 0$. Den är strängt växande och är sin egen derivata. Potenslagarna gäller:

$$e^s e^t = e^{s+t}, \quad e^s/e^t = e^{s-t}, \quad (e^s)^t = e^{st}, \dots$$

Log. Eftersom exponentialfunktionen är strängt växande har den en invers. Inversen kallas ln. Definitionsmängden för ln är alla positiva reella tal och värdemängden är alla reella tal. ln är strängt växande, $D \ln x = 1/x$. Logaritmlagarna:

$$\ln(st) = \ln s + \ln t, \quad \ln(s/t) = \ln s - \ln t, \quad \ln(s^t) = t \ln s, \dots$$

Vi ska skissa beviset för detta.