SF1625 Envariabelanalys

Föreläsning 10

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

19 september 2016

Översikt över några viktiga derivatatillämningar

1. Förändringstakt. Derivata mäter förändringstakt, till exemel (men inte bara) hastighet.

2. Linjär approximation. Två exempel på nya användningar: Newton-Raphson (ekvationslösning), L'Hopital (gränsvärden).

3. Max/min-problem. Derivata kan användas för hitta funktioners största och minsta värden.

4. Kurvritning. Derivatan ger underlag för att rita grafen $y = f(x)$ och svara på en mängd frågor om f. Dessutom: vad säger andraderivatan? och asymptoter.

5. Taylors formel. Som linjär approximation fast med polynom av högre grad.

Kan ni derivera?

För att kunna tillämpa derivator så måste man kunna derivera. Så derivera dessa funktioner!

$$f(x) = x - \arcsin x$$

$$g(x) = xe^{1/x}$$

$$h(x) = \arctan 2x - \ln \sqrt{1 + 4x^2}$$

$$k(x) = \ln(\cos x) + x \tan x - \frac{x^2}{2}, \quad \text{om } -\pi/2 < x < \pi/2$$

1. Förändringstakt. En massa är upphängd i en fjäder enligt figur på tavlan. Avvikelsen från jämviktsläget (i meter) ges vid tiden t sekunder av

$$y = 2\sin\left(3t - \frac{\pi}{3}\right).$$

Bestäm den maximala farten hos massan.

2. Förändringstakt. Ett tråg enligt figur på tavlan fylls med vatten i en takt av 1 kubikmeter per minut. Hur snabbt stiger vattenytan i det ögonblick då djupet är $1/2$ meter?

Tillämpningar av derivata

Linjär approximation $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$ kan användas för att **lösa ekvationer.** Om man vill lösa ekvationen $f(x) = 0$, så kan man börja med att gissa ett startvärde x_0, göra linjär approximation kring x_0 och ta reda på när den linjära approximationen blir 0. Med andra ord:

Man ersätter ekvationen $f(x) = 0$ med ekvationen $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$ och löser ut x. Man får

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Sedan kan man upprepa proceduren få en följd av successiva (och förhoppningsvis bättre och bättre) approximationer av lösningen. Detta är **Newton-Raphsons metod** (se kapitel 4.2):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Tillämpningar av linjär approximation

L'Hospitals regel för att räkna ut gränsvärden. Under vissa förutsättningar på f och g gäller att

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

I bokens kapitel 4.3 står att läsa mer om l'Hopitals regel:

Arbete

1. Visa att ekvationen $e^x + 2x + 1 = 0$ har exakt en lösning. Approximera lösningen genom att utgå från startvärdet $x_0 = 0$ och göra en iteration av Newton-Raphsons metod.

2. Beräkna gränsvärdena $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ och $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Teori om max och min

Definition. Om $f(a) \geq f(x)$ för alla x i definitionsmängden så sägs $f(a)$ vara f:s **största värde**, eller **globalt maximum**.

Definition. Om det finns en omgivning I till a sådan att $f(a) \geq f(x)$ för alla $x \in I$ som tillhör definitionsmängden till f, så sägs $f(a)$ vara ett **lokalt maximum** till f. Och a sägs då vara en **lokal maxpunkt.**

Motsvarande definitioner med $\leq$ ger betydelserna av globalt och lokalt **minimum.**

Lokala extrempunkter

Definition. En **global extrempunkt** är en punkt som antingen är en global maxpunkt eller en global minpunkt.

Definition. En **lokal extrempunkt** är en punkt som antingen är en lokal maxpunkt eller en lokal minpunkt.

Motsvarande definitioner görs för extrem**värden**.

(Obs: terasspunkter är inte extrempunkter.)

Definition. Om $f'(a) = 0$ så sägs a vara en **kritisk** eller **stationär** punkt till f.

Gör så här!

Hitta max och min: De enda punkter där f kan anta lokala/globala max/min är **kritiska** punkter, **änd**punkter och punkter där **derivata saknas**.

Obs. Det finns ingen garanti för att f har max/min! Det krävs alltid ett argument för detta!

Arbete

Uppgift 1. Avgör om $g(x) = xe^{-2x}$, $-1 < x < 1$, antar något största respektive minsta värde. Vad är de i så fall?

Uppgift 2. Avgör om $h(x) = x - \arccos x$ antar något största respektive minsta värde. Vad är de i så fall?

En gammal tentauppgift

Dagens tentaproblem.

Låt $f(x) = e^{-x} \sin x$.
A. Bestäm alla kritiska (stationära) punkter till funktionen f.
B. Avgör vilka av de kritiska punkterna som är lokala maxpunkter.

Kurvritning

Låt f vara given av $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. Skissa grafen $y = f(x)$.

(Skissa grafen betyder: bestäm definitionsmängden för f, finn $f'(x)$ och ange var f är deriverbar. Hitta derivatans nollställen och gör ett teckenschema för derivatan. Bestäm med hjälp av detta var f är strängt växande resp strängt avtagande och hitta alla lokala och globala extrempunkter. Beräkna ev intressanta gränsvärden, i det här fallet gränsvärdena när x går mot $\pm\infty$. Kontrollera var grafen skär koordinataxlarna. Rita kurvan.)

Svarar på massor av frågor

Nyss skissade vi grafen till $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. Med hjälp av det arbete vi gjorde då kan vi nu svara på massor av frågor om f:

- Vad är f:s största resp minsta värde?
- Vad är värdemängden till f?
- Är det sant att $f(x) \leq 1$ för alla x?
- Hur många lösningar har ekvationen $f(x) = 1/10$?
- Hur många lösningar har ekvationen $f(x) = -1/10$?

För denna typ av frågor krävs oftast en komplett derivataundersökning av funktionen.

Andraderivatans betydelse

Konvexitet. Om man tar två punkter på funktionsgrafen och drar en linje genom dem – ligger då grafen mellan punkterna alltid över eller under linjen, oavsett vilka punkter man väljer? Under: konvex. Över: konkav.

Andraderivatan.

Om $f''(x) > 0$ för alla x i ett intervall I så är f konvex i I.

Om $f''(x) < 0$ för alla x i ett intervall I så är f konkav i I.

Uppgift: Undersök om $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln x$ och $h(x) = x^2$ är konvexa eller konkava.