Kapitel 2 exercise 87

Vi följer ledtråden och antar att $\mathcal{U}$ är en öppen övertäckning av $[a,b]$ och sätter

$$C = \{ x \in [a,b] \,;\ \text{ändligt många element i } \mathcal{U} \text{ täcker } [a,x] \}$$

$C \neq \emptyset$ eftersom det finns någon mängd $U \in \mathcal{U}$ så att $a \in U$, annars skulle inte $[a,b] \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$.

~~Antag att~~ Också C är begränsad från ovan så l.u.b $C = c$ existerar. Vi vill visa att om $c \neq b$, dvs om $c < b$, så är c inte en l.u.b.

Så låt oss antaga att $c < b$. Då kommer det att exsistera ett $\varepsilon > 0$ så att $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset U_c \in \mathcal{U}$ eftersom $c \in \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ och därför så kommer $c \in U_c$ för något $U_c \in \mathcal{U}$, men U_c är en öppen mängd så $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset U_c$.

Om $c = $ l.u.b C så kommer $c - \frac{\varepsilon}{2} \in C$ vilket innebär att $[a, c-\frac{\varepsilon}{2}]$ kan täckas av ändligt många element, $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$. Men då kommer

$$[a, c+\tfrac{\varepsilon}{2}] \subset \underbrace{\left[\bigcup_{j=1}^{n} U_j\right] \cup U_c}_{\text{ändligt många}} \quad \text{så} \quad c+\tfrac{\varepsilon}{2} \in C$$

Så c är ingen övre begränsning om $c<b$.

Så $\text{l.u.b}\, C = b$.

Men det betyder att $\exists U_b \in \mathcal{U}$ och eftersom U_b är en öppen mängd så kommer

$(b-\varepsilon, b] \subset U_b$ för något $\varepsilon > 0$.

Eftersom $b = \text{l.u.b}\, C$ så är $b-\varepsilon/2 \in C$ så vi kan täcka $[a, b-\frac{\varepsilon}{2}]$ med ändligt många $U_j \in \mathcal{U}$, säg $U_1, \dots, U_N$, men det implicerar att

$$[a,b] \subset \left[\bigcup_{j=1}^{N} U_j\right] \cup U_b .$$

Så $[a,b]$ har en ändlig övertäckning.

Ex 89) Let $\mathcal{U}$ be any open cover of fA.

Then $f^{-1}(U)$ is open for any set $U \in \mathcal{U}$ since f is continuous. Also

$\mathcal{V} = \{f^{-1}(U) ; U \in \mathcal{U}\}$ is an open cover for A. This implies, since A is compact, that $\mathcal{V}$ has a finite subcover, say

$$f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2), \ldots, f^{-1}(U_N).$$

But then $f\left(\bigcup_{j=1}^{N} f^{-1}(U_j)\right) = \bigcup_{j=1}^{N} U_j$ contains fA. Therefore $U_1, U_2, \ldots, U_N$ is a finite sub-cover for fA.

$\blacksquare$

Ex 95a chapter 7.

Vi vill visa att $\bar{S} \subset \bigcap_{\substack{S \subset K \\ K \text{ sluten}}} K$.

Eftersom $\bar{S}$ är en sluten mängd som innehåller S (t.e.x. enl ~~sats~~ Prop 53 sid 93 } så $\bar{S} = S \cup S' \Rightarrow S \subset \bar{S}$) så kommer

$\bigcap_{\substack{S \subset K \\ K \text{ sluten}}} K \subset \bar{S}$. Vi måste visa motsatsen.

Låt a vara en hopningspunkt till S och K vara en sluten mängd så att $S \subset K$.
Då måste a vara en hopningspunkt till K och eftersom K är sluten så $a \in K$. D.v.s. om

a är en hopningspunkt till S, $a \in S'$, så kommer $a \in K$ för alla K så att K är sluten och $S \subset K$.
Det följer att $S' \subset \bigcap_{\substack{S \subset K \\ K \text{ sluten}}} K$. Och eftersom S.

är en delmängd till alla K i ~~snittet~~ skärningen så kommer

$S \subset \bigcap_{\substack{S \subset K \\ K \text{ sluten}}} K$. Så $\underbrace{S' \cup S}_{= \bar{S}} \subset \bigcup_{\substack{S \subset K \\ K \text{ sluten}}} K$.

$\boxtimes$