

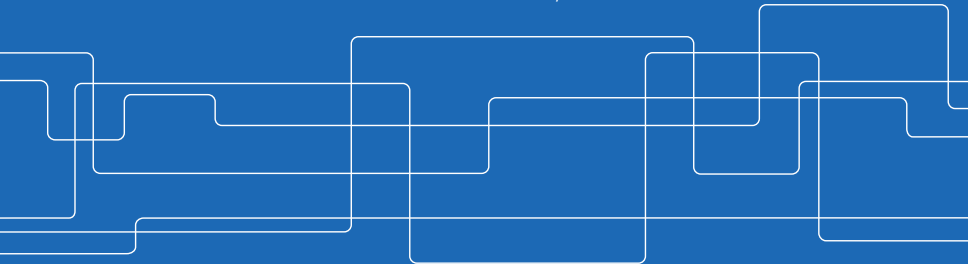


# Föreläsning 11

## Reglerteknik AK

©Bo Wahlberg  
*Avdeleningen för Reglerteknik, KTH*

4 oktober, 2016





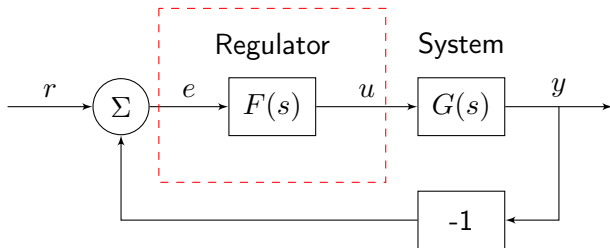
# Introduktion

Förra gången:

- Alternativa regulatorstrukturer

Dagens program:

- Implementering:



Hur förverkligar man sambandet mellan  $e(t)$  och  $u(t)$ ?

Det finns olika typer av implementeringar:

- Mekanisk
- Hydraulisk
- Pneumatisk
- Elektronisk

**Centrifugalregulatorn** är en mekanisk implementering av en P-regulator.

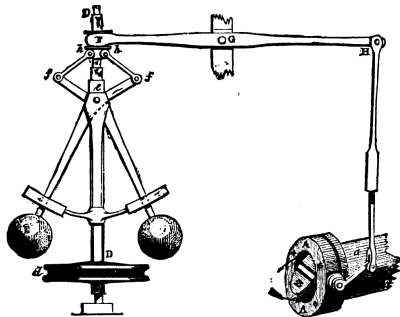
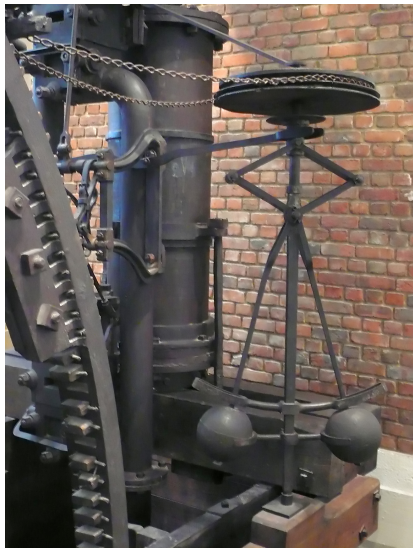


FIG. 4.—Governor and Throttle-Valve.

# Analog implementering - Centrifugalregulatorn





## Digital implementering

Köp en dator med ett *AD/DA*-kort.

1. **A/D**: Mäter den kontinuerliga signalen vid diskreta tidpunkter (avståndet mellan dessa kallas *samplingintervallet* och betecknas  $T$ ).
2. Datorprogram = "regulatoralgoritm"

$$u(kT) = f\left(e_F(kT), e_F((k-1)T), \dots\right)$$

3. **D/A**: Skickar ut den beräknade (diskreta) styrsignalen. Oftast hålls den styckvis konstant mellan datapunkterna (enklaste formen av interpolation). Detta kallas en hållkrets.

Se figur 10.4 i boken!



# Realtidssystem

- Användargränssnitt
- Synkronisering
- Kommunikation

Autocodegenerering (Matlab  $\rightarrow$  C)



# Regulatoralgoritm

$u(t)$  ges normalt av en diff.-ekvation.

$$\mathbf{PI: } u = K(e + \frac{1}{T_I} \int e) \Rightarrow \dot{u} = K\dot{e} + \frac{K}{T_I}e$$

$$\mathbf{Lead/Lag: } U(s) = \frac{\tau_D s + 1}{\beta \tau_D s + 1} E(s) \Rightarrow \beta \tau_D \dot{u} + u = \tau_D \dot{e} + e$$



# Regulatoralgoritm

Digital implementering sker genom *numerisk* lösning av differential ekvationer.

Idéen är att ersätta derivator med differensapproximationer.





## Operatorformalism:

- Deriveringsoperatör,  $p$ .

$$pu(t) = \dot{u}(t)$$

- Förskjutningsoperatör,  $q_T$ .

$$q_T u(t) = u(t + T)$$

- Inverterade förskjutningsoperatör,  $q_T^{-1}$ .

$$q_T^{-1} u(t) = u(t - T)$$



## Euler bakåt och Tustins formel

Vi kan approximera förstaderivatatan med

$$\dot{u}(t) \approx \frac{u(t) - u(t - T)}{T}$$

Eller skrivet med hjälp av operatorer som

$$p \approx \frac{1}{T} [1 - q_T^{-1}]$$

Detta är *Euler bakåt*.

En annan vanlig approximation är *Tustins formel*

$$p \approx \frac{2}{T} \frac{1 - q_T^{-1}}{1 + q_T^{-1}}$$



## Regulatoralgoritm

Betraktar vi en Taylorutveckling

$$q_T u(t) = u(t + T) = \{\text{Taylor}\} = u(t) + T p u(t) + \dots = e^{pT} u(t)$$

ser vi att vi kan uttrycka förskjutningsoperatoren som

$$q_T = e^{pT}$$

vilket kan jämföras med tidsförskjutningen  $e^{sT}$ .

$$\text{Euler bakåt: } \frac{1}{T} [1 - e^{-pT}] = p + \mathcal{O}(T)$$

$$\text{Tustins formel: } \frac{2}{T} \left( \frac{1 - e^{-pT}}{1 + e^{-pT}} \right) \approx p + \mathcal{O}(T^2)$$



## Example (Lead-länk + Euler bakåt)

Vi kan skriva om en given differentialekvation

$$\beta\tau_D\dot{u} + u = \tau_D\dot{e} + e$$

med hjälp av Euler bakåt som

$$\beta\tau_D\frac{1}{T}(1 - q_T^{-1})u(t) + u(t) = \frac{\tau_D}{T}(1 - q_T^{-1})e(t) + e(t)$$

varur vi sedan kan lösa ut  $u(t)$  som

$$u(t) = \frac{\beta\tau_D}{\beta\tau_D + T} \underbrace{[q_T^{-1}u(t)]}_{u(t-T)} + \frac{\tau_D + T}{\beta\tau_D + T}e(t) - \frac{\tau_D}{\beta\tau_D + T} \underbrace{q_T^{-1}e(t)}_{e(t-T)}$$



## Example (PI + Tustin)

Givet en differentialekvation

$$\dot{u} = K\left(\dot{e} + \frac{1}{T_I}e\right)$$

identifierar vi från sambandet  $U = FE$  att

$$F(p) = \frac{K\left(p + \frac{1}{T_I}\right)}{p}$$

som vi kan skriva om med hjälp av Tustins formel som

$$F_T(q_T^{-1}) = \frac{K\left[\frac{2}{T}\left(\frac{1-q_T^{-1}}{1+q_T^{-1}}\right) + \frac{1}{T_I}\right]}{\frac{2}{T}\left(\frac{1-q_T^{-1}}{1+q_T^{-1}}\right)} = \frac{K\left[1 + \frac{T}{2T_I} + \left(-1 + \frac{T}{2T_I}\right)q_T^{-1}\right]}{1 - q_T^{-1}}$$



## Example (PI + Tustin, fort.)

Vi finner sedan  $u(t)$  från sambandet

$$u(t) = F_T(q_T^{-1})e(t)$$

med insatt uttryck för  $F_T(q_T^{-1})$  som

$$u(t) = u(t - T) + K \left[ \left(1 + \frac{T}{2T_I}\right)e(t) + \left(-1 + \frac{T}{2T_I}\right)e(t - T) \right]$$



# Samplingsintervall

Hur ska man välja samplingsintervallet?

Man bör ta hänsyn till

- Räknekapacitet
- Stabilitetsmarginaler
- Aliaseffekt



# Samplingsintervall

## Stabilitetsmarginal:

Försämras vid digital implementation

- Tidsfördröjning på grund av sampel- och hållkrets
- Approximationer

Sampel- och hållkrets  $\approx T$  tidsfördröjning

### Example

Vill vi tolerera max  $20^\circ$  minskning av  $\varphi_m$ :

$$\implies \omega_c T < 0.35(\text{rad})$$

$$\implies T < \frac{0.35}{\omega_c}$$





# Samplingsintervall

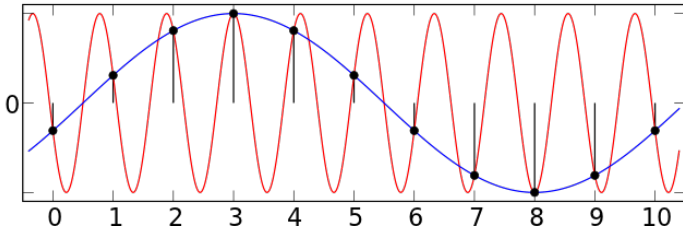
*Samplingsfrekvensen ges av*

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} \approx 20\omega_c$$

Används en smartare diskret design kan man ta

$$\omega_s \approx (5 \rightarrow 10)\omega_c$$

## Aliaseffekten (vinkningsdistorsion)



Efter sampling kan signaler med frekvens högre än  $\frac{\omega_s}{2}$   
 (Nyquistfrekvensen) ej skiljas från signaler med frekvens lägre än  
 $\frac{\omega_s}{2}$ .



# Aliaseffekten (vinkningsdistorsion)

## Motmedel:

1. Bestäm intervall  $[0, \omega_{\max}]$  där vi behöver en korrekt beskrivning av signaler
2. Välj  $T$  så att  $\omega_{\max} < \frac{\omega_s}{2} \implies T < \frac{\pi}{\omega_{\max}}$
3. LP-filtrera (low pass) signalerna *innan* sampling