SF1625 Envariabelanalys

Föreläsning 11-12

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

21-23 september 2016

Översikt över några viktiga derivatatillämningar

1. Förändringstakt. Derivata mäter förändringstakt, till exemel (men inte bara) hastighet.

2. Linjär approximation. Två exempel på nya användningar: Newton-Raphson (ekvationslösning), L'Hopital (gränsvärden).

3. Max/min-problem. Derivata kan användas för hitta funktioners största och minsta värden.

4. Kurvritning. Derivatan ger underlag för att rita grafen $y = f(x)$ och svara på en mängd frågor om f. Dessutom: vad säger andraderivatan? och asymptoter.

5. Taylors formel. Som linjär approximation fast med polynom av högre grad.

Läxan

Uppgift 1. Avgör om $g(x) = xe^{-2x}$, $-1 < x < 1$, antar något största respektive minsta värde. Vad är de i så fall?

Uppgift 2: Dagens tentaproblem.

Låt $f(x) = e^{-x} \sin x$.
A. Bestäm alla kritiska (stationära) punkter till funktionen f.
B. Avgör vilka av de kritiska punkterna som är lokala maxpunkter.
C. Har f något största värde?

Andraderivatans betydelse

Konvexitet. Om man tar två punkter på funktionsgrafen och drar en linje genom dem – ligger då grafen mellan punkterna alltid över eller under linjen, oavsett vilka punkter man väljer? Under: konvex. Över: konkav.

Andraderivatan.

Om $f''(x) > 0$ för alla x i ett intervall I så är f konvex i I.

Om $f''(x) < 0$ för alla x i ett intervall I så är f konkav i I.

Uppgift: Undersök om $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln x$ och $h(x) = x^2$ är konvexa eller konkava.

Arbete

Uppgift: Hur lång tid tar det att hoppa från 10 meter på Eriksdalsbadet?

(Tips: vad är accelerationen? Gör antaganden om verkligheten, ställ upp en matematisk modell och räkna ut svaret på frågan.)

Asymptoter

En **asymptot** är en linje som funktionsgrafen kommer hur nära som helst. Det finns tre fall:

1. Lodrät. Om $\lim_{x\to a^\pm} f(x) = \pm\infty$ så är linjen $x = a$ en lodrät asymptot.

2. Vågrät. Om $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$ så är linjen $y = L$ en vågrät asymptot.

3. Sned. Om $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - ax - b) = 0$ så är linjen $y = ax + b$ en sned asymptot.

Uppgift: Finn alla asymptoter till $y = x + \dfrac{x}{x^2 - 1}$

Taylorpolynom

Givet en (tillräckligt deriverbar) f och en punkt a kan vi bilda:

$$
\begin{aligned}
p_0(x) &= f(a) \\
p_1(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) \\
p_2(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \\
p_3(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3
\end{aligned}
$$

och så vidare

Observera att $1! = 1$ så $p_1(x)$ är precis den linjära approximationen av f kring a som vi har studerat tidigare. Användningen av Taylorpolynom är approximation, dvs

$$f(x) \approx p_n(x) \qquad \text{för } x \text{ nära } a$$

Taylorpolynom

Vi observerar att Taylorpolynomen är konstruerade med data från funktionen f i punkten a, närmare bestämt funktionens värde och funktionens derivators värden i punkten a.

Och konstruktionen är sådan att Taylorpolynomen härmar funktionen, så att

p_1 har samma värde och samma derivata i punkten a som f,

p_2 har samma värde, samma derivata och samma andraderivata i punkten a som f,

och så vidare.

Taylorpolynom

Felet i approximationen ges av ungefär hur nästa term i utvecklingen skulle se ut:

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

för någon punkt c mellan x och a. Förutsättningen för att detta ska gälla är att f är $n+1$ gånger deriverbar på något intervall som innehåller x och a.

Taylorpolynom kring origo, dvs då punkten a är 0, brukar ofta kallas Maclaurinpolynom.

Taylorpolynom

Taylors formel (sammanfattning). Om f är $n+1$ gånger deriverbar i ett intervall som innehåller a och x så gäller att

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

där höger led kallas Taylorpolynomet av grad n till f kring $x = a$. Felet i approximationen ges av

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{för något } c \text{ mellan } x \text{ och } a$$

Uppgift: Bestäm TP av grad 2 till $f(x) = \sqrt{x}$ kring punkten $x = 100$ och använd det för att hitta ett närmevärde till $\sqrt{104}$. Analysera felet!

Exempel på Taylors formel

Några standardutvecklingar. För x nära 0 gäller att

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots$$