DD1350 Logik för dataloger

Fö 5 – Naturlig deduktion för predikatlogik

Kort repetition

Predikatlogik utökar det satslogiska språket med:

- variabler
- konstanter
- funktionssymboler
- relationssymboler
- kvantifierare

T.ex. $\forall x\ (\ Primtal(x) \wedge x>2 \rightarrow\ Udda(x))$

Idag:

Vi utökar naturlig deduktion till att även gälla för predikatlogik.

Bevisregler:

- alla regler från satslogiken, plus
- introduktions- och elimineringsregler för
  - likhet
  - all-kvantifiering $\forall x$
  - existens-kvantifiering $\exists x$

Likhet

'=' är en speciell relationssymbol som vi antar alltid finns i logiken.

x = y betecknar att x och y är samma objekt (extensionell likhet), t.ex. 2+2=4, mamma(anna)=eva

Notera att Prolog har ett annat likhetsbegrepp (syntaktisk likhet).

Vanlig användning: Max ett objekt har egenskapen E:

$$\forall x \, \forall y \, (E(x) \wedge E(y) \rightarrow x = y)$$

Regler för likhet

Introduktion:

$$\frac{}{t = t} =_\mathrm{i}$$

Eliminering:

$$\frac{t_1 = t_2 \qquad \phi[t_1 / x]}{\phi[t_2 / x]} =_\mathrm{e}$$

undviker infångande!

undviker infångande!

Bevisexempel: symmetri

Sekvent: $x = y \vdash y = x$

Bevis:

1	$x = y$	premiss	
2	$x = x$	$=$i	$(z = x)[x / z]$
3	$y = x$	$=$e 1, 2	$(z = x)[y / z]$

Bevisexempel: transitivitet

Sekvent: $x = y,\ y = z \vdash x = z$

Bevis:

1	$y = z$	premiss	
2	$x = y$	premiss	$(x = y)[y / y]$
3	$x = z$	$=$e 1, 2	$(x = y)[z / y]$

Regler: $\forall x$ eliminering

Eliminering:

$$\frac{\forall x\,\phi}{\phi[t/x]}\ \forall x\ \mathrm{e}$$

Informellt exempel:

Alla människor är dödliga.
Sokrates far är en människa.
Alltså är Sokrates far dödlig.

Bevisexempel

Sekvent: $\forall x\,(M(x) \rightarrow D(x)),\quad M(f(s)) \;\vdash\; D(f(s))$

$$
\begin{aligned}
M(x) &: x \text{ är en människa} \\
D(x) &: x \text{ är dödlig} \\
s &: \text{Sokrates} \\
f(x) &: \text{fadern till } x
\end{aligned}
$$

Bevisexempel

Sekvent: $\forall x\, (M(x) \rightarrow D(x)),\ \ M(f(s))\ \vdash\ D(f(s))$

Bevis:

1	$\forall x\, (M(x) \rightarrow D(x))$	premiss	
2	$M(f(s)) \rightarrow D(f(s))$	$\forall x$ e 1	$[x/f(s)]$
3	$M(f(s))$	premiss	
4	$D(f(s))$	$\rightarrow$e 3, 2	

Regler: $\forall x$ introduktion

Introduktion:

$$\frac{\boxed{\begin{array}{l} x_0 \\ \quad\vdots \\ \phi[x_0/x] \end{array}}}{\forall x\,\phi}\;\forall x\text{ i}$$

Tillämpning:

- inför *ny* x_0 (öppnar ny box: ”räckvidden” på x_0)
- härled $\phi[x_0/x]$
- stäng boxen

Bevisexempel

Sekvent: $\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x)),\ \forall x\,P(x) \ \vdash\ \forall x\,Q(x)$

Bevis:

1		$\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$	premiss
2		$\forall x\,P(x)$	premiss
3	x_0		
4		$P(x_0)$	$\forall x$ e 2
5		$P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$	$\forall x$ e 1
6		$Q(x_0)$	$\rightarrow$e 4, 5
7		$\forall x\,Q(x)$	$\forall x$ i 3-6

Regler: $\exists x$ introduktion

Introduktion:

$$\frac{\phi[t/x]}{\exists x\,\phi}\;\exists x \text{ i}$$

Informellt exempel:

Sokrates far är en smart människa.
Alltså finns det smarta människor.

Bevisexempel

Sekvent: $M(f(s)) \land S(f(s)) \;\vdash\; \exists x\,(M(x) \land S(x))$

Bevis:

1 $M(f(s)) \land S(f(s))$ premiss

2 $\exists x\,(M(x) \land S(x))$ $\exists x$ i 1 $(M(x) \land S(x))[f(s)/x]$

Bevisexempel

Sekvent: $\forall x\, P(x) \vdash \exists x\, P(x)$

Bevis:

1	$\forall x\, P(x)$	premiss	
2	$P(x)$	$\forall x$ e 1	
3	$\exists x\, P(x)$	$\exists x$ i 2	$P(x)[x/x]$

Regler: $\exists \boldsymbol{x}$ eliminering

Eliminering: (jämför disjunktions-eliminering)

$$\frac{\exists x\,\phi \qquad \boxed{\begin{array}{ll} x_0 & \phi[x_0/x] \\ & \quad\vdots \\ \chi & \end{array}}}{\chi}\ \exists x\ \mathrm{e}$$

Tillämpning:

inför *ny* x_0 *samt* antag $\phi[x_0/x]$ (*en* box!!)

härled χ, stäng boxen

Bevisexempel

Sekvent: $\forall x\,(P(x) \rightarrow q),\ \exists x\,P(x) \ \vdash\ q$

$$P(x) : \textit{knapp x är nedtryckt}$$

$$q : \textit{lampan lyser}$$

Bevisexempel

Sekvent: $\forall x\,(P(x) \rightarrow q),\ \exists x\, P(x) \ \vdash\ q$

Bevis:

1		$\forall x\,(P(x) \rightarrow q)$	premiss
2		$\exists x\, P(x)$	premiss
3	x_0	$P(x_0)$	antagande
4		$P(x_0) \rightarrow q$	$\forall x$ e 1
5		q	$\rightarrow$e 3, 4
6		q	$\exists x$ e 2,3-5

Bevisexempel

Sekvent: $\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x)),\ \exists x\, P(x) \ \vdash\ \exists x\, Q(x)$

Bevis:

1		$\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$	premiss
2		$\exists x\, P(x)$	premiss
3	x_0	$P(x_0)$	antagande
4		$P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$	$\forall x$ e 1
5		$Q(x_0)$	$\rightarrow$e 3, 4
6		$\exists x\, Q(x)$	$\exists x$ i 5
7		$\exists x\, Q(x)$	$\exists x$ e 2,3-6