# Föreläsning 9
# Reglerteknik AK

©Bo Wahlberg
*Avdelningen för Reglerteknik, KTH*

21 september, 2016

# Tillståndsåterkoppling

Antag att vi återkopplar ett system med hjälp av $u = -Lx + l_0 r$.
Då blir det återkopplade systemet på formen:

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \\ u &= -Lx + l_0 r \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x} &= Ax + B(-Lx + l_0 r) \\ y &= Cx \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{cases} \dot{x} &= (A - BL)x + Bl_0 r \\ y &= Cx \end{cases}}$$

Det slutna systemets poler ges av egenvärderna till $A - BL$, dvs. rötterna till ekvationen $\det\left[sI - (A - BL)\right] = 0$.

# Polplacering

Vi observerar att

- $A - BL$ har $n$ stycken egenvärden
- $L$ har $n$ stycken parametrar

Om systemet är styrbart kan det slutna systemets poler placeras godtyckligt via lämpligt val av $L$.

# Polplacering

## Example

Antag att vi har systemet och återkopplingen

$$\begin{cases} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \\ u &= -\begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix} x + l_0 r \end{cases}$$

Vi beräknar $A - BL$ som

$$A - BL = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -l_1 & -l_2 \end{pmatrix}$$

# Polplacering

## Example (fort.)

Egenvärden till $A - BL$ ges av

$$\det\left[\lambda I - (A - BL)\right] = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ l_1 & \lambda + l_2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + l_2\lambda + l_1$$

Antag nu att vi t.ex. vill placera polerna i $-3$ och $-3$ (dubbelpol).

$$\Rightarrow (\lambda + 3)^2 = \lambda^2 + 6\lambda + 9$$

Jämför vi nu med ekvationen ovan ser vi att vi bör välja

$$\begin{cases} l_2 & = 6 \\ l_1 & = 9 \end{cases} \Longrightarrow u = -9x_1 - 6x_2 + l_0 r$$

## Example (fort.)

Detta ger oss det återkopplade systemet

$$\begin{cases} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} l_0 r \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

Hade vi istället velat lägga polerna i -3000 och -3000 (ca 1000 gånger snabbare) skulle vi behövt välja

$$\Rightarrow \begin{cases} l_1 &= 9 \cdot 10^6 \\ l_2 &= 6 \cdot 10^3 \end{cases}$$

Vi inser att valet av slutna systemets poler begränsas av storleken på $u(t)$.

# Polplacering

Hur ska man välja $l_0$?

Så att $y(t) = r(t)$ i stationärt tillstånd då $r(t) =$ konstant, dvs. $G_c(0) = 1$.

Kom ihåg att $\dot{x} = 0$ i stationärt tillstånd.

# Polplacering

## Example (fort.)

Vi hade det återkopplade systemet

$$\begin{cases} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} l_0 r \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

I stationärt tillstånd och med konstant referens har vi

$$\begin{cases} r(t) &= \bar{r} \\ \dot{x} &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = -9x_1 - 6x_2 + l_0\bar{r} = 0 \end{cases}$$

Som direkt ger $x_1 = \frac{l_0}{9}\bar{r}$. Men eftersom $y = x_1 = \frac{l_0}{9}\bar{r}$ så bör vi välja $l_0 = 9$ för att $y = \bar{r}$.

$$\Longrightarrow u = -9x_1 - 6x_2 + 9r$$

# Polplacering

Svagheten med metoden vi använde ovan för att bestämma $l_0$ är att den kräver att man känner till $G(0)$ och att inga störningar påverkar systemet.

$\Longrightarrow$ Inför I-reglering.

# Sammanfattning

**Tillståndsåterkoppling:**

- $$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{cases} \iff G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}$$

- $$u = -Lx + l_0 r \Rightarrow$$
$$\begin{cases} \dot{x} &= (A - BL)x + Bl_0 r \\ y &= Cx \end{cases} \Rightarrow G_c(s) = \frac{(b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n) l_0}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_n}$$

- Poler: $\det[sI - (A - BL)] = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_n = 0$

- 
  - Vi kan påverka slutna systemets poler via $L$ (optimering)
  - Nollställen ändras ej

# Styrbar kanonisk form

**Example (Styrbar kanonisk form, s. 133)**

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} u \\
y &= (b_1 \cdots b_n) x
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow A - BL = \begin{pmatrix} -\overbrace{(a_1 + l_1)}^{\alpha_1} & -\overbrace{(a_2 + l_2)}^{\alpha_2} & \cdots & -\overbrace{(a_n + l_n)}^{\alpha_n} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

# Styrbar kanonisk form

Det återkopplade systemet är också på styrbar kanonisk form.

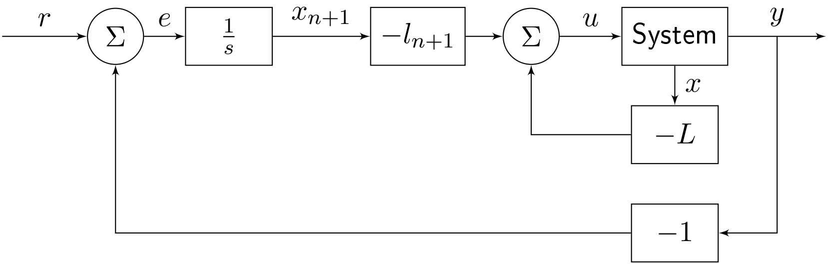
- Lätt att bestämma $L$
- Lätt att inse att nollställena ej påverkas (samma $C$!)

Välj $l_0$ så att $G_c(0) = 1$.

$$\Rightarrow l_0 = \frac{\alpha_n}{b_n}$$

Svaghet: Vi måste känna till $\alpha_n$ och $b_n$ exakt och får ej ha störningar eller statiskt reglerfel.

# Yttre I-reglering




Vi tar till ett knep och inför *extra tillstånd*

$$x_{n+1} = \int_0^t e(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \big[r(\tau) - y(\tau)\big]\,\mathrm{d}\tau$$

$$\dot{x}_{n+1} = -Cx + r$$

# Yttre I-reglering

Vi utvidgar modellen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_{n+1} \end{pmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{x}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{x}} + \underbrace{\begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} r$$

# Yttre I-reglering

Tillståndsåterkoppla:

$$u = -Lx - l_{n+1}x_{n+1} \Leftrightarrow u = -\boldsymbol{Lx}$$

Välj $\boldsymbol{L}$ så att $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BL}$ får önskade egenvärden (poler).

Stationärt har vi

$$\begin{cases} \dot{x} & = 0 \\ \dot{x}_{n+1} & = y - r = 0 \end{cases}$$

trots t.ex. stegstörningar och modellfel.

# Observatör

Vad gör man om alla tillståndsvariabler **ej** kan mätas exakt?

**Svar:** Inför en *observatör*. (Skatta tillstånden)

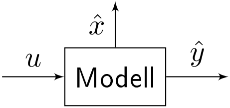
Exempelvis kan vi mäta läge och därutav uppskatta hastigheten.

# Observatör

Antag vi har en modell:

$$\begin{cases} \dot{x} & = Ax + Bu \\ y & = Cx \end{cases}$$

Idén är att simulera systemet:




$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}} & = A\hat{x} + Bu \\ \hat{y} & = C\hat{x} \end{cases}$$

*Felsignalen* är

$$y(t) - \hat{y}(t) = y(t) - C\hat{x}(t)$$

och ett mått på hur bra simuleringen fungerar.

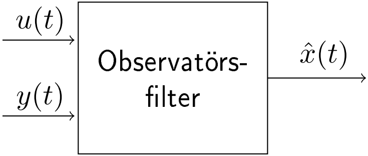
# Observatör

**Återkoppla!** $\Rightarrow$ Observatör (Kalmanfilter)

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$$

$$\Leftrightarrow \dot{\hat{x}} = (A - KC)\hat{x} + Bu + Ky$$

Observera att $K$ är en $n \times 1$ vektor (P-reglering).



# Observatör

Hur väljer vi $K$?

*Skattningsfelet* $\tilde{x}$ ges av:

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - A\hat{x} - Bu - K(Cx - C\hat{x})$$

$$\implies \dot{\tilde{x}} = (A - KC)\tilde{x},$$

där $\tilde{x}(0)$ är initialt fel,

# Observatör

Lösningen till $\dot{\tilde{x}} = (A - KC)\tilde{x}$ ges av

$$\tilde{x}(t) = e^{[A-KC]t}\,\tilde{x}(0)$$

Notera att:

- $\tilde{x} \to 0$ då $t \to \infty$ om egenvärderna till $A - KC$ ligger i V.H.P.
- Med hjälp av $K$ kan vi påverka hur snabbt $\tilde{x} \to 0$
- Om systemet är observerbart kan man placera egenvärderna till $A - KC$ godtyckligt

# Observatör

*Mätfelet* ges av $y_m = y + e$.

$$\Rightarrow \dot{\tilde{x}} = (A - KC)\tilde{x} + Ke$$

Stort $K$ $\Rightarrow$ Känsligt för mätfel

Litet $K$ $\Rightarrow$ Långsamt

Optimera $\Rightarrow$ Kalmanfilter!

Reglering: Välj $|\text{eig}(A - BL)| \leq |\text{eig}(A - KC)|$

# Observatör

## Example

Betrakta systemet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

Vi beräknar

$$A - KC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{pmatrix}$$

och sedan

$$\det \left[ sI - (A - KC) \right] = s^2 + k_1 s + k_2$$

(Slutna systemets poler i $-3$).

# Observatör

## Example (fort.)

Lägg observatörpolerna i t.ex. $-4$:

$$(s+4)^2 = s^2 + 8s + 16$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix}$$

**Svar:**

$$\dot{\hat{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix} \left(y - \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{x}\right)$$

# Återkoppling från rekonstruerade tillstånd

System:

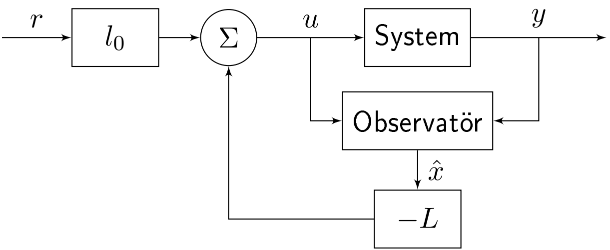
$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

Observatör:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - c\hat{x})$$

Återkoppling:

$$u = -L\hat{x} + l_0 r$$



# Återkoppling från rekonstruerade tillstånd

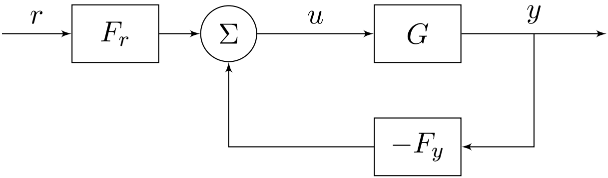
Återkopplat system? (Ordning $2n$)

$$G_c(s) = C\big[sI - (A - BL)\big]^{-1} B l_0$$

Identisk $G_c$ som vid tillståndsåterkoppling eftersom $\hat{x}(0) = x(0) = 0$ vid överföringsfunktions-algebra.

Förklaring: $\tilde{x}$ är ej styrbar, men observerbar. Motsvarande poler förkortas.

# Alternativ implementering




$$
\begin{aligned}
F_r &= \Big(1 - L\big[sI - (A - BL - KC)\big]^{-1} B\Big) l_0 \\
F_y &= L\big[sI - (A - BL - KC)\big]^{-1} K
\end{aligned}
$$

*"Polplacering"*

# Komplementära känslighetsfunktionen

*Den komplementärna känslighetsfunktionen* ges av

$$T(s) = G_c(s) \times \underbrace{L\big[sI - (A - KC)\big]^{-1}K}_{L,\ K \text{ och observatörens dynamik påverkar robustheten}}$$

Den vanliga *känslighetsfunktionen* ges av

$$S = 1 - T$$