SF1625 Envariabelanalys

Föreläsning 13

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

26-28 september 2016

Integraler. Vi kommer att göra följande:

- En intuitiv idé om vad begreppet betyder
- En precis definition av vad begreppet betyder
- Huvudsatsen: integral och derivata är "inversaöperationer
- Beräkna integraler med primitiv funktion
- Integrationstekniker: substitution, partiell integration mm
- Nästa vecka: Tillämpningar (inte bara area!)

Intuitiv idé om integraler

I många tillämpningar uppkommer situationen att man behöver summera termer som består av ett funktionsvärde gånger längden på ett intervall. Exempel:

Area = höjd x bredd

Arbete = Kraft x väg

Massa = Densitet x storlek

Om höjden, kraften eller densiteten är konstanta får man i dessa exempel bara två tal gånger varandra. Men om de är variabla är situationen mycket svårare och leder fram till integralbegreppet.

Intuitiv idé om integraler

Vi ska nu säga vad $\int_a^b f(x)\,dx$ betyder. Först intuitivt:

Grundläggande idé: Vi antar att f är begränsad på $[a, b]$. Vi delar sedan in $[a, b]$ i ett antal små delintervall och väljer en punkt i varje delintervall. På varje delintervall tar vi sedan funktionsvärdet i punkten vi har valt och multiplicerar det med delintervallets längd. Sedan summerar vi.

Ungefärlig definition: Om vi genomför ovanstående idé med jättesmå delintervall så får vi integralen

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Definition av begreppet

Vi kommer nu till den precisa definitionen av $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Anta att f är begränsad på $[a, b]$. Välj punkter $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ så att

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

En sådan mängd punkter kallas för en partition av $[a, b]$.
Låt oss döpa partitionen vi har gjort till P. Den delar in $[a, b]$ i delintervall. Längden av det första delintervallet är då $x_1 - x_0$, låt oss beteckna den längden med Δx_1. På samma sätt är längden av delintervall nummer j

$$\Delta x_j = x_j - x_{j-1}.$$

Det största av talen Δx_j kallas för normen av partitionen, betecknad $\|P\|$. Dvs

$$\|P\| = \max_{1 \le j \le n} \Delta x_j$$

Definition av begreppet

Om f är kontinuerlig på $[a, b]$ så har f ett minsta och ett största värde på varje slutet delintervall. Anta att för $j = 1, \ldots, n$ det minsta värdet på delintervall j antas i punkten ℓ_j och det största värdet i punkten u_j. Bilda den Lägre Riemannsumman $L(f, P)$ och den övre Riemannsumman $U(f, P)$ enligt

$$\begin{aligned} L(f, P) &= \sum_{j=1}^{n} f(\ell_j)\Delta x_j \\ &= f(\ell_1)\Delta x_1 + f(\ell_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\ell_n)\Delta x_n. \\ U(f, P) &= \sum_{j=1}^{n} f(u_j)\Delta x_j \\ &= f(u_1)\Delta x_1 + f(u_2)\Delta x_2 + \cdots + f(u_n)\Delta x_n. \end{aligned}$$

(Om f inte är kontinuerlig men i alla fall begränsad så kan vi i konstruktionen ovan byta ut minsta och största värdet på varje delintervall mot infimum och supremum och göra samma sak.)

Definition av begreppet

Definition. Om det finns exakt ett tal I sådant att vi för alla partitioner P har att

$$L(f, P) \leq I \leq U(f, P)$$

så säger vi att f är integrerbar på $[a, b]$ och talet I är då integralen av f över $[a, b]$, dvs

$$I = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Allmänna Riemannsummor

När vi bildade lägre och övre Riemannsummor så valde vi punkter i varje delintervall så att f blev så liten respektive så stor som möjligt. Man kan också välja andra punkter. Då får man en allmänn Riemannsumma:

Givet en partition P av $[a, b]$ väljer vi en punkt i varje delintervall. Dvs för $j = 1, \dots, n$ väljer vi en punkt c_j så att

$$x_{j-1} \leq c_j \leq x_j$$

Låt C beteckna mängden $\{c_1, \dots, c_n\}$ och bilda summan

$$\begin{aligned} R(f, P, C) &= \sum_{j=1}^{n} f(c_j)\Delta x_j \\ &= f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n. \end{aligned}$$

Detta kallas för Riemannsumman till f med avseende på partitionen P och punkterna C.

Allmänna Rieamnnsummor

Observation. För en given partition P gäller för vilket val av C som helst att

$$L(f, P) \leq R(f, P, C) \leq U(f, P)$$

Om f är integrerbar måste därför

$$\lim R(f, P, C) = \int_a^b f(x)\,dx$$

när $n \to \infty$ och $\|P\| \to 0$.

Gör en egen Riemannsumma

Uppgift. Skriv upp en konkret Riemannsumma till integralen

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

Ett villkor för integrerbarhet

Observation. Om man genom val av partition kan få skillnaden mellan övre och lägre Riemannsumma hur liten som helst, så måste f vara integrerbar. Dvs

Om det för varje $\epsilon > 0$ finns en partition P av $[a, b]$ sådan att

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$$

så är f integrerbar på $[a, b]$

Sådana funktioner är garanterat integrerbara

Sats. Om f är kontinuerlig på $[a, b]$ så är f integrerbar på $[a, b]$.

Sats. Vi kan utvidga integralbegreppet till styckvis kontinuerliga funktioner och om f är styckvis kontinuerlig på $[a, b]$ så är f integrerbar på $[a, b]$.

Tänk på integraler som summor

Man kan alltså tänka på integraler som (gränsvärden av) summor:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^{n} f(c_j)\Delta x_j$$
$$= f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n.$$

Med hjälp av det tänket så känns många egenskaper hos integraler självklara:

Enkla egenskaper (sats 3 i boken)

1. $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

2. $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

3. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

4. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$ om $f \le g$ i $[a, b]$

5. $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$ (triangelolikheten)

Dagens tentaproblem

1. Bestäm en Riemannsumma R, med fyra delintervall, som approximerar integralen

$$\int_1^3 \frac{dt}{t}.$$

Förklara varför din Riemannsumma ger ett närmevärde till $\ln 3$.

2. Bestäm två Riemannsummor R_1 och R_2 till integralen

$$\int_0^6 \frac{1}{1+x^3}\,dx$$

båda med integrationsintervallet indelat i tre lika långa delar och sådana att R_1 är mindre och R_2 större än integralens värde.

En ny medelvärdessats

Medelvärdessatsen för integraler. Om f är kontinuerlig på $[a, b]$ så finns ett tal c mellan a och b sådant att

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c)(b - a).$$

Talet $f(c)$ kallas medelvärdet av f på $[a, b]$.

Bevis av medelvärdessatsen för integraler

Bevis för medelvärdessatsen för integraler. Då f är kontinuerlig och $[a, b]$ slutet och begränsat måste f anta ett största värde M och ett minsta värde m när x varierar i $[a, b]$. Då måste (rita figur!)

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Om vi dividerar med $b-a$ ser vi att $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ligger mellan m och M som är båda är funktionsvärden till f. Med satsen om mellanliggande värden får vi att det finns ett c mellan a och b så att

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c).$$

Det är precis vad vi skulle bevisa.

Huvudsatsen

Hittills har vi bara sysslat med att slå fast vad **begreppet integral** står för och härlett några enkla egenskaper hos detta begrepp. Vi har inte försökt räkna ut integraler. Man kan förstås göra det genom att ta gränsvärdet av summor. Det är jobbigt. Som tur är finns enklare sätt. Det bygger på huvudsatsen som säger att derivata och integral är ”motsatta” operationer och att man därför kan räkna ut integraler genom att anti-derivera, eller hitta primitiv funktion.

Huvudsatsen

Huvudsatsen (the fundamental theorem of calculus).

Antag att f är kontinuerlig på $[a, b]$ Då gäller:

DEL 1. Funktionen $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ är en primitiv funktion till f, dvs $F'(x) = f(x)$.

DEL 2. Om G är någon primitiv funktion till f, så är

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a).$$

Bevis finns i boken och i filmen.

Beräkna dessa derivator:

A. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x \sin t \, dt$

B. $\dfrac{d}{du}\displaystyle\int_0^u \sin v \, dv$

C. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^0 \sin t \, dt$

D. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \sin t \, dt$

Bestämda och obestämda integraler

Observera att om f är integrerbar på $[a, b]$ så gäller att

$\int_a^b f(x)\,dx$ är ett reellt tal.

Ovanstående kallas en bestämd integral. Vi inför en obestämd integral också, utan gränser. Den har en annan betydelse:

$\int f(x)\,dx$ betyder: en godtycklig primitiv funktion till f.

Huvudsatsen

Beräkna dessa integraler:

A. $\displaystyle\int_4^9 \sqrt{x}\,dx$

B. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

C. $\displaystyle\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

D. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx$

Integrationstekniker

Eftersom det kan vara svårt att på rak arm komma på primitiva funktioner, så finns ett antal tekniker för att göra det. De viktigaste integrationsteknikerna är **variabelsubstitution** och **partiell integration**. För rationella funktioner är också **partialbråksuppdelning** bra att kunna.

Variabelsubstitution i integraler kommer från kedjeregeln för derivator. Partiell integration från produktregeln.

Variabelsubstitution.

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Villkor: g är deriverbar på $[a, b]$ och f är kontinuerlig på g:s värdemängd (när x varierar i $[a, b]$)

Bevis: Kedjeregeln för derivator

Exempel på variabelsubstitution

Beräkna integralerna med variabelsubstitution:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin x}\, dx$$

$$\int_1^{e} \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx$$

$$\int \tan x \, dx$$

Partiell integration.

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx.$$

Villkor: F och g har kontinuerliga derivator på $[a, b]$ och $F' = f$

Bevis: Produktregeln för derivator

Exempel på partiell integration

Beräkna integralerna med partiell integration:

$$\int_1^e x \ln x \, dx$$

$$\int_0^{\pi/3} x \cos x \, dx$$

$$\int_0^{\ln 3} x e^x \, dx$$

$$\int \ln x \, dx$$