Exercise 3.1

Om $|f(t)-f(x)| \leq |t-x|^2$ så kommer

$$\frac{|f(t)-f(x)|}{|t-x|} \leq |t-x|$$

Om vi tittar på gränsvärdet $t \to x$

$$\lim_{t\to x} \frac{|f(t)-f(x)|}{|t-x|} = \lim_{t\to x} |t-x| = 0$$

så ser vi att $f'(x)=0$ för alla x.

Medelvärdessatsen ger

(1) $$f(a)-f(b) = \underbrace{f'(\theta)}_{=0}(b-a) = 0 \quad \text{för alla } a,b\in\mathbb{R}$$

där vi använde att $f'=0$.

Så $f(a)=f(b)$ för alla $a,b\in\mathbb{R}$

det följer att f är konstant.

Exercise 3.2 a)

För att se att en Hölder kontinuerlig funktion är likformigt kontinuerlig så måste vi visa att $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ så att

$$|x-y| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \qquad (1)$$

Vi vet, eftersom f är Hölder, att

$$|f(x) - f(y)| \leq H |x-y|^\alpha \qquad (2)$$

så om $|x-y| < \left(\frac{\varepsilon}{H}\right)^{1/\alpha} = \delta_\varepsilon$ så implicerar

(2) att (1) gäller.

För att definiera f på hela $[a,b]$ så skulle vi vilja definiera

$$f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x) \qquad \text{och} \qquad f(b) = \lim_{x \to b^-} f(x).$$

För att göra detta så måste gränsvärdena existera. ~~V~~ Låt oss titta på följden

$x_j \to a^-$, säg $x_j = a + \frac{1}{j}$, f.o.v.t.

Observera att

$$|f(x_j) - f(x_k)| \leq H |x_j - x_k|^\alpha \leq H \frac{1}{j^\alpha} \to 0$$

Så för varje $\varepsilon > 0$ så existerar det ett $J_\varepsilon > 0$ så att

$$j,k > J_\varepsilon \implies |f(x_j) - f(x_k)| \leq H \left|\frac{1}{j} - \frac{1}{k}\right|^\alpha \leq \frac{H}{J_\varepsilon^\alpha} < \varepsilon.$$

Så $f(x_j)$ är en Cauchy följd och konvergerar ~~därför~~ till något värde, som vi definierar som $f(a)$.

$$f(a) = \lim_{j \to \infty} f(a + \tfrac{1}{j}).$$ (Vi kan definiera $f(b)$ på samma sätt)

För att visa att f, definierad på hela $[a,b]$, är Hölder så räcker det att visa att

$$|f(a) - f(x)| \leq H|x-a|^\alpha$$ (och $|f(b)-f(x)| \leq H|x-b|^\alpha$)

Men vi vet att

$$|f(a+\tfrac{1}{j}) - f(x)| \leq H\left|x - (a+\tfrac{1}{j})\right|^\alpha$$

och kan ta gränsvärdet $j \to \infty$ på båda sidor om olikheten (eftersom $|\cdot|$ är kontinuerligt)

$$|f(a) - f(x)| = \lim_{j\to\infty} |f(a+\tfrac{1}{j}) - f(x)| = \lim_{j\to\infty} H|x-(a+\tfrac{1}{j})|^\alpha = H|x-(a+\tfrac{1}{j})|^\alpha$$

Vilket skulle bevisas.

Att bevisa det samma för b görs på samma sätt.

Exercise 3.3a

Enligt medelvärdessatsen så existerar det ett $\theta \in (x,y)$ så att om $y > x$ $x,y \in (a,b)$.

$$f(y) - f(x) = \underbrace{(y-x)}_{>0} \underbrace{f'(\theta)}_{>0}. > 0$$

Så

$b > a \Rightarrow f(y) > f(x)$.

Dvs f är strängt växande

$\boxed{/}$

12)

a i) Observera att

$$D_n = \frac{f(\beta_n) - f(0)}{\beta_n} \cdot \frac{\beta_n}{\beta_n - \alpha_n} + \frac{f(0) - f(\alpha_n)}{\alpha_n} \frac{\alpha_n}{\beta_n - \alpha_n}$$

$$= \frac{f(\beta_n) - f(0)}{\beta_n} \frac{\beta_n}{\beta_n - \alpha_n} + \frac{f(\alpha_n) - f(0)}{\alpha_n} \underbrace{\left(1 - \frac{\beta_n}{\beta_n - \alpha_n}\right)}_{>0}.$$

Eftersom $\frac{f(h) - f(0)}{h} \to f'(0)$ så finns

det ett $\delta_\varepsilon > 0$ så att om $|h| < \delta_\varepsilon$ så

$$\left| \frac{f(h) - f(0)}{h} - f'(0) \right| < \varepsilon .$$

Specifikt så kommer, om $|\alpha_n|$ och $|\beta_n| < \delta_\varepsilon$,

$$|D_n - f'(0)| = \left| \underbrace{\left(\frac{f(\beta_n) - f(0)}{\beta_n} - f'(0) \right)}_{<\varepsilon} \frac{\beta_n}{\beta_n - \alpha_n} + \underbrace{\left(\frac{f(\alpha_n) - f(0)}{\alpha_n} - f'(0) \right)}_{<\varepsilon} \left(1 - \frac{\beta_n}{\beta_n - \alpha_n} \right) \right|$$

$< \varepsilon$.

så $D_n \to 0$, då $\alpha_n \to 0^-$ och $\beta_n \to 0^+$