

Inlämningsuppgift 1, SF1677

Namn: _____ Personnummer: _____

Email: _____

Allmänt och Regler: Uppgiften är individuell, men du får diskutera den med andra studenter. I praktiken innebär detta ni får diskutera hur mycket som helst med varandra men att du skall sitta ensam när du skriver dina svar. Du får inte dela dina skrivna lösningar med någon. Uppgiften kommer att rättas med kriterierna, komplettering, “godkänt utan bonus” och “godkänt med bonus”. Godkänt med bonus innebär att du automatiskt får full poäng på ett av tentans tal. Inlämningsuppgifterna kommer att bedömmas kvalitativt efter hur väl ni resonerar och inte individuellt poängsätts. **Alla svar skall bevisas!**

Sista inlämningsdag är: Måndagen den 3e Oktober Via mail (till johnan@kth.se)¹ eller på föreläsningen. Observera att datumet är lite senare vad som anges i föreläsningsplanen.

Uppgift 1: I algebran så använder man ibland Zariski topologin på $\mathbb{R}$. I Zariski topologin så är en mängd $U \subset \mathbb{R}$ öppen om U^c , komplementet till U , har ändligt många element eller om $U = \emptyset$. Vi kallar $\mathbb{R}$ med Zariski topologin för Z och definierar en avbildning $f : Z \mapsto Z$ att vara kontinuerlig om $f^{-1}(U)$ är öppen (i Zariski topologin) för varje öppen mängd (i Zariski topologin) U .² D.v.s. f är kontinuerlig om $(f^{-1}(U))^c$ har ändligt många element för alla U sådana att U^c har ändligt många element.

Observera att vi definierar ingen metrik på Z : så $\epsilon - \delta$ definitionen för kontinuitet är inte applicerbar, ej heller kontinuitetsdefinitionen: $f(x_j) \rightarrow f(x_0)$ om $x_j \rightarrow x_0$ är applicerbar.

1. Ge en beskrivning³ av alla kontinuerliga funktioner $f : Z \mapsto Z$.
2. Ge ett exempel på en funktion $f(x) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ som är kontinuerlig i Zariski topologin men diskontinuerlig i den vanliga topologin.
3. Ge ett exempel på en funktion $f(x) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ som är diskontinuerlig i Zariski topologin men kontinuerlig i den vanliga topologin.

Uppgift 2: Vi säger att en funktion $f(x) : D \mapsto \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, är Lipschitz-kontinuerlig på D om det existerar ett $L \in \mathbb{R}$ så att

$$x, y \in D \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|,$$

vi vi kallar L för Lipschitz konstanten till f .

Låt $g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ ha egenskapen att det existerar ett $L_g \in \mathbb{R}$ så att det för varje $z \in [a, b]$ så existerar det ett $\epsilon_z > 0$ så att

$$x, y \in (z - \epsilon_z, z + \epsilon_z) \cap [a, b] \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leq L_g|x - y|.$$

Bevisa att g är Lipschitz-kontinuerlig på $[a, b]$ med Lipschitz konstant L_g .

[LEDTRÅD] Är $[a, b]$ “covering compact”? Har $[a, b]$ något “open cover” som du kan använda?

Forts. nästa sida.

¹Scannade lösningar eller datorskrivna, papper fotograferade med mobilkamera godtas inte!

²Här använder vi notationen $f^{-1}(U) = f^{\text{pre}}(U) = \{x \in \mathbb{R}; f(x) \in U\}$.

³Din beskrivning skall vara kort och tydlig. T.ex. “Alla växande funktioner är kontinuerliga.” eller “Alla funktioner $f(x)$ så att $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ och det finns tre tal x_1, x_2 och x_3 så att $f(x_i) = 7$ för $i = 1, 2, 3$ är kontinuerliga.” Givetvis så är svaren i denna fotnot fel.

Uppgift 3: Låt M vara mängden av alla begränsade talföljder i $\mathbb{R}$, d.v.s.

$$M = \{(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots); a_n \in \mathbb{R} \text{ och } \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < \infty\}.$$

1. Definiera metriken $d_1 : M \times M \mapsto \mathbb{R}$ enligt

$$d_1((a_n), (b_n)) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n|,$$

där vi använder notationen (a_n) för talföljden $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$

- (a) Bevisa att om (a_n^j) är en följd av talföljder så kommer $\lim_{j \rightarrow \infty} d_1((a_n^j), (a_n^0)) = 0$ att implicera att $\lim_{j \rightarrow \infty} |a_n^j - a_n^0| = 0$ för alla $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Hitta en sluten och begränsad mängd $A \subset M$ som inte är kompakt.
- (c) **Frivillig svår uppgift.** Gäller omvändningen till 1a: Om $\lim_{j \rightarrow \infty} |a_n^j - a_n^0| = 0$ för alla $n \in \mathbb{N}$ så kommer $d_1((a_n^j), (a_n^0)) \rightarrow 0$?

2. Definiera metriken $d_2 : M \times M \mapsto \mathbb{R}$ enligt

$$d_2((a_n), (b_n)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|a_n - b_n|}{|a_n - b_n| + 1}$$

där vi använder notationen (a_n) för talföljden $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$

- (a) Bevisa att om (a_n^j) är en följd av talföljder och om $\lim_{j \rightarrow \infty} |a_n^j - a_n^0| = 0$ för alla $n \in \mathbb{N}$ då kommer

$$\lim_{j \rightarrow \infty} d_2((a_n^j), (a_n^0)) = 0.$$

- (b) Gäller det att om (a_n^j) är en följd av talföljder så att

$$\lim_{j \rightarrow \infty} d_2((a_n^j), (0)) = 0,$$

där $(0) = 0, 0, 0, \dots$ är följderna som bara består av nollor, så kommer $\lim_{j \rightarrow \infty} a_n^j = 0$ för alla n ?

Lycka Till!