

# DD1361 Programmeringsparadigm HT16

## LOGIKPROGRAMMERING 2

Dilian Gurov, TCS

## Induktiva datatyper: Listor (inbyggd)

- ▶ Listor
- ▶ Strukturell induktion över listor
- ▶ Strängar

## Läsmaterial

- ▶ Boken: kap. 4
- ▶ PROLOG-fil: list.pl
- ▶ Handouts: Föreläsningsanteckningar

## Induktiv definition

Listorna är en oändlig mängd av PROLOG-termer:

- ▶ En lista är antingen **tom** [], eller en **konstruktion** [a | l] av ett element a (“huvud”) och en lista l (“svans”).
- ▶ Definition i Backus–Naur Form (BNF):  
$$\langle \text{lst} \rangle ::= [] \mid [\langle e1 \rangle \mid \langle \text{lst} \rangle]$$
där  $\langle e1 \rangle$  är vilken som helst PROLOG-term.

Därmed matchar varje lista l antingen [] eller [H | T], och vi kan använda detta för att ta isär (**destruera**) listor för att definiera predikat över listor med **strukturell induktion**.

## Notationskonvention

Vi skriver [a, b, c] istället för [a | [b | [c | []]]], och detta gör också PROLOGS “pretty-print” av listor.

# Strukturell induktion över listor

För induktivt definierade datatyper kan vi användas av **strukturell induktion** för att definiera predikat över dem. Konkret, för listor:

- ▶ för tomma listan [], definiera predikatet direkt;
- ▶ för sammansatta listan [H | T], definiera predikatet med användning av samma predikat, beräknat över svansen T.

Om man följer principen garanterar man att predikatet blir “väldefinierad” över **alla** listor.

Läs också texten: *“The Principle of Structural Induction”* !

# Längden på en lista

Längden på en lista  $L$  är antalet element  $N$  i listan.

Definition med strukturell induktion:

# Längden på en lista

Längden på en lista  $L$  är antalet element  $N$  i listan.

Definition med strukturell induktion:

- ▶ längden på tomma listan `[]`

# Längden på en lista

Längden på en lista  $L$  är antalet element  $N$  i listan.

Definition med strukturell induktion:

- ▶ längden på tomma listan  $[]$  är 0;

# Längden på en lista

Längden på en lista  $L$  är antalet element  $N$  i listan.

Definition med strukturell induktion:

- ▶ längden på tomma listan  $[]$  är 0;
- ▶ längden på sammansatta listan  $[H \mid T]$



# Längden på en lista

Längden på en lista  $L$  är antalet element  $N$  i listan.

Definition med strukturell induktion:

- ▶ längden på tomma listan  $[]$  är 0;
- ▶ längden på sammansatta listan  $[H \mid T]$  är längden på svansen  $T$  plus 1.

# listLength(L, N)

I PROLOG:

```
listLength([], 0).  
listLength(_ | T, N) :-  
    listLength(T, NT),  
    N is NT + 1.
```

Notera att vi använder operatoren "is" istället för "=". Varför?

Notera också hur vi använder mönster-matchning i första argumentet för att åstadkomma datatyp-destruktionen som är nödvändig för strukturella induktionen.

Kan vi vända på ordningen på de två konjunkterna?

Finns även inbyggd som `length(L, N)`.

## Kontrollflödet vid `listLength([a, b], N)`.

Fråga: `listLength([a, b], N)`.

## Kontrollflödet vid `listLength([a, b], N)`.

Fråga: `listLength([a, b], N)`.

- ▶ skapar instans av andra regeln:

```
listLength([A1 | T1], N1) :- listLength(T1, NT1),
```

```
N1 is NT1 + 1.
```

```
unifierar A1=a, T1=[b], N1=N
```

## Kontrollflödet vid `listLength([a, b], N)`.

Fråga: `listLength([a, b], N)`.

- ▶ skapar instans av andra regeln:

```
listLength([A1 | T1], N1) :- listLength(T1, NT1),  
N1 is NT1 + 1.
```

unifierar  $A1=a$ ,  $T1=[b]$ ,  $N1=N$

- ▶ `listLength([b], NT1)`. (rekursivt anrop)

# Kontrollflödet vid `listLength([a, b], N)`.

Fråga: `listLength([a, b], N)`.

- ▶ skapar instans av andra regeln:

```
listLength([A1 | T1], N1) :- listLength(T1, NT1),  
N1 is NT1 + 1.
```

unifierar  $A1=a$ ,  $T1=[b]$ ,  $N1=N$

- ▶ `listLength([b], NT1)`. (rekursivt anrop)

- ▶ skapar instans av andra regeln:

```
listLength([A2 | T2], N2) :- listLength(T2, NT2),  
N2 is NT2 + 1.
```

unifierar  $A2=b$ ,  $T2=[]$ ,  $N2=NT1$

# Kontrollflödet vid `listLength([a, b], N)`.

Fråga: `listLength([a, b], N)`.

- ▶ skapar instans av andra regeln:

```
listLength([A1 | T1], N1) :- listLength(T1, NT1),  
N1 is NT1 + 1.
```

unifierar  $A1=a$ ,  $T1=[b]$ ,  $N1=N$

- ▶ `listLength([b], NT1)`. (rekursivt anrop)

- ▶ skapar instans av andra regeln:

```
listLength([A2 | T2], N2) :- listLength(T2, NT2),  
N2 is NT2 + 1.
```

unifierar  $A2=b$ ,  $T2=[]$ ,  $N2=NT1$

- ▶ `listLength([], NT2)`. (rekursivt anrop)

# Kontrollflödet vid `listLength([a, b], N)`.

Fråga: `listLength([a, b], N)`.

- ▶ skapar instans av andra regeln:

```
listLength([A1 | T1], N1) :- listLength(T1, NT1),  
N1 is NT1 + 1.
```

unifierar  $A1=a$ ,  $T1=[b]$ ,  $N1=N$

- ▶ `listLength([b], NT1)`. (rekursivt anrop)

- ▶ skapar instans av andra regeln:

```
listLength([A2 | T2], N2) :- listLength(T2, NT2),  
N2 is NT2 + 1.
```

unifierar  $A2=b$ ,  $T2=[]$ ,  $N2=NT1$

- ▶ `listLength([], NT2)`. (rekursivt anrop)

- ▶ unifierar mot första regeln,  $NT2=0$



# Kontrollflödet vid `listLength([a, b], N)`.

Fråga: `listLength([a, b], N)`.

- ▶ skapar instans av andra regeln:

```
listLength([A1 | T1], N1) :- listLength(T1, NT1),  
N1 is NT1 + 1.
```

unifierar  $A1=a$ ,  $T1=[b]$ ,  $N1=N$

- ▶ `listLength([b], NT1)`. (rekursivt anrop)

- ▶ skapar instans av andra regeln:

```
listLength([A2 | T2], N2) :- listLength(T2, NT2),  
N2 is NT2 + 1.
```

unifierar  $A2=b$ ,  $T2=[]$ ,  $N2=NT1$

- ▶ `listLength([], NT2)`. (rekursivt anrop)

- ▶ unifierar mot första regeln,  $NT2=0$

- ▶  $NT1$  is  $0 + 1$ .

# Kontrollflödet vid `listLength([a, b], N)`.

Fråga: `listLength([a, b], N)`.

- ▶ skapar instans av andra regeln:  
`listLength([A1 | T1], N1) :- listLength(T1, NT1),  
N1 is NT1 + 1.`  
unifierar  $A1=a$ ,  $T1=[b]$ ,  $N1=N$
- ▶ `listLength([b], NT1)`. (rekursivt anrop)
  - ▶ skapar instans av andra regeln:  
`listLength([A2 | T2], N2) :- listLength(T2, NT2),  
N2 is NT2 + 1.`  
unifierar  $A2=b$ ,  $T2=[]$ ,  $N2=NT1$
  - ▶ `listLength([], NT2)`. (rekursivt anrop)
    - ▶ unifierar mot första regeln,  $NT2=0$
  - ▶  $NT1$  is  $0 + 1$ .
    - ▶ evaluerar  $0+1$  till 1, unifierar  $NT1=1$

## Kontrollflödet vid `listLength([a, b], N)`.

Fråga: `listLength([a, b], N)`.

- ▶ skapar instans av andra regeln:  
`listLength([A1 | T1], N1) :- listLength(T1, NT1),  
N1 is NT1 + 1.`  
unifierar  $A1=a$ ,  $T1=[b]$ ,  $N1=N$
- ▶ `listLength([b], NT1)`. (rekursivt anrop)
  - ▶ skapar instans av andra regeln:  
`listLength([A2 | T2], N2) :- listLength(T2, NT2),  
N2 is NT2 + 1.`  
unifierar  $A2=b$ ,  $T2=[]$ ,  $N2=NT1$
  - ▶ `listLength([], NT2)`. (rekursivt anrop)
    - ▶ unifierar mot första regeln,  $NT2=0$
  - ▶  $NT1$  is  $0 + 1$ .
    - ▶ evaluerar  $0+1$  till 1, unifierar  $NT1=1$
- ▶  $N$  is  $1 + 1$ .

# Kontrollflödet vid `listLength([a, b], N)`.

Fråga: `listLength([a, b], N)`.

- ▶ skapar instans av andra regeln:  
`listLength([A1 | T1], N1) :- listLength(T1, NT1),  
N1 is NT1 + 1.`  
unifierar  $A1=a$ ,  $T1=[b]$ ,  $N1=N$
- ▶ `listLength([b], NT1)`. (rekursivt anrop)
  - ▶ skapar instans av andra regeln:  
`listLength([A2 | T2], N2) :- listLength(T2, NT2),  
N2 is NT2 + 1.`  
unifierar  $A2=b$ ,  $T2=[]$ ,  $N2=NT1$
  - ▶ `listLength([], NT2)`. (rekursivt anrop)
    - ▶ unifierar mot första regeln,  $NT2=0$
  - ▶  $NT1$  is  $0 + 1$ .
    - ▶ evaluerar  $0+1$  till 1, unifierar  $NT1=1$
- ▶  $N$  is  $1 + 1$ .
  - ▶ evaluerar  $1+1$  till 2, unifierar  $N=2$

# Kontrollflödet vid `listLength([a, b], N)`.

Fråga: `listLength([a, b], N)`.

- ▶ skapar instans av andra regeln:  
`listLength([A1 | T1], N1) :- listLength(T1, NT1),  
N1 is NT1 + 1.`  
unifierar  $A1=a$ ,  $T1=[b]$ ,  $N1=N$
- ▶ `listLength([b], NT1)`. (rekursivt anrop)
  - ▶ skapar instans av andra regeln:  
`listLength([A2 | T2], N2) :- listLength(T2, NT2),  
N2 is NT2 + 1.`  
unifierar  $A2=b$ ,  $T2=[]$ ,  $N2=NT1$
  - ▶ `listLength([], NT2)`. (rekursivt anrop)
    - ▶ unifierar mot första regeln,  $NT2=0$
  - ▶  $NT1$  is  $0 + 1$ .
    - ▶ evaluerar  $0+1$  till 1, unifierar  $NT1=1$
- ▶  $N$  is  $1 + 1$ .
  - ▶ evaluerar  $1+1$  till 2, unifierar  $N=2$

Svar:  $N=2$

# Kontrollflödet vid `listLength(L, 2)`.

## Från KS:en HT15:

```
Fråga: length(L, 2).
- misslyckas med första regeln, därför att 0 och 2 inte
  kan unifieras;
- skapar instans av andra regeln:
  length([A1|T1], N1) :- length(T1, NT1), N1 is NT1+1.
  unifierar: L=[A1|T1], N1=2;
  -- length(T1, NT1).
    --- lyckas med första regeln;
      unifierar: T1=[], NT1=0;
  -- 2 is 0+1.
    --- evaluerar 0+1 till 1;
    --- misslyckas, därför att 2 och 1 inte kan unifieras;
    --- backtrackar;
  -- length(T1, NT1).
    --- skapar instans av andra regeln:
      length([A2|T2], N2) :- length(T2, NT2), N2 is NT2+1.
      unifierar: T1=[A2|T2], N2=NT1;
      ---- length(T2, NT2).
        ----- lyckas med första regeln;
          unifierar: T2=[], NT2=0;
        ---- NT1 is 0+1.
          ----- evaluerar 0+1 till 1;
          ----- unifierar: NT1=1;
      -- 2 is 1+1.
        --- evaluerar 1+1 till 2;
        --- lyckas, därför att 2 kan unifieras med 2.
Svar: L=[A1|[A2|[]]] som presenteras som L=[A1, A2].
```

## Medlemskap i en lista: $\text{in}(X, L)$

Medlemstest som ska vara sant om och bara om  $X$  finns i listan  $L$ .

## Medlemskap i en lista: $\text{in}(X, L)$

Medlemstest som ska vara sant om och bara om  $X$  finns i listan  $L$ .

```
in(H, [H | _]).  
in(X, [_ | T]) :- in(X, T).
```

Strukturella induktionen är över listan  $L$  (dvs andra argumentet).  
 $\text{in}(X, [])$  är alltid falskt, därför ingen regel för tom lista!

Finns även inbyggd som  $\text{member}(X, L)$ .



## Kontrollflödet vid $\text{in}(2, L)$ , $\text{in}(1, L)$ .

Fråga:  $\text{in}(2, L)$ ,  $\text{in}(1, L)$ .

## Kontrollflödet vid $\text{in}(2, L)$ , $\text{in}(1, L)$ .

Fråga:  $\text{in}(2, L)$ ,  $\text{in}(1, L)$ .

▶  $\text{in}(2, L)$ .

## Kontrollflödet vid $\text{in}(2, L)$ , $\text{in}(1, L)$ .

Fråga:  $\text{in}(2, L)$ ,  $\text{in}(1, L)$ .

- ▶  $\text{in}(2, L)$ .

- ▶ skapar instans av första regeln:  $\text{in}(H1, [H1 \mid A1])$ .  
unifierar  $H1=2$ ,  $L=[2 \mid A1]$

## Kontrollflödet vid $\text{in}(2, L)$ , $\text{in}(1, L)$ .

Fråga:  $\text{in}(2, L)$ ,  $\text{in}(1, L)$ .

- ▶  $\text{in}(2, L)$ .
  - ▶ skapar instans av första regeln:  $\text{in}(H1, [H1 \mid A1])$ .  
unifierar  $H1=2$ ,  $L=[2 \mid A1]$
- ▶  $\text{in}(1, [2 \mid A1])$ .

# Kontrollflödet vid $\text{in}(2, L)$ , $\text{in}(1, L)$ .

Fråga:  $\text{in}(2, L)$ ,  $\text{in}(1, L)$ .

- ▶  $\text{in}(2, L)$ .
  - ▶ skapar instans av första regeln:  $\text{in}(H1, [H1 \mid A1])$ .  
unifierar  $H1=2$ ,  $L=[2 \mid A1]$
- ▶  $\text{in}(1, [2 \mid A1])$ .
  - ▶ skapar instans av första regeln:  $\text{in}(H2, [H2 \mid A2])$ .  
misslyckas med unifieringen

# Kontrollflödet vid $\text{in}(2, L)$ , $\text{in}(1, L)$ .

Fråga:  $\text{in}(2, L)$ ,  $\text{in}(1, L)$ .

- ▶  $\text{in}(2, L)$ .
  - ▶ skapar instans av första regeln:  $\text{in}(H1, [H1 \mid A1])$ .  
unifierar  $H1=2$ ,  $L=[2 \mid A1]$
- ▶  $\text{in}(1, [2 \mid A1])$ .
  - ▶ skapar instans av första regeln:  $\text{in}(H2, [H2 \mid A2])$ .  
misslyckas med unifieringen
  - ▶ skapar instans av andra regeln:  
 $\text{in}(X1, [A3 \mid T1]) \text{ :- } \text{in}(X1, T1)$ .  
unifierar  $X1=1$ ,  $A3=2$ ,  $T1=A1$

# Kontrollflödet vid $\text{in}(2, L)$ , $\text{in}(1, L)$ .

Fråga:  $\text{in}(2, L)$ ,  $\text{in}(1, L)$ .

- ▶  $\text{in}(2, L)$ .
  - ▶ skapar instans av första regeln:  $\text{in}(H1, [H1 \mid A1])$ .  
unifierar  $H1=2$ ,  $L=[2 \mid A1]$
- ▶  $\text{in}(1, [2 \mid A1])$ .
  - ▶ skapar instans av första regeln:  $\text{in}(H2, [H2 \mid A2])$ .  
misslyckas med unifieringen
  - ▶ skapar instans av andra regeln:  
 $\text{in}(X1, [A3 \mid T1]) \text{ :- } \text{in}(X1, T1)$ .  
unifierar  $X1=1$ ,  $A3=2$ ,  $T1=A1$ 
    - ▶  $\text{in}(1, A1)$ .

# Kontrollflödet vid $\text{in}(2, L)$ , $\text{in}(1, L)$ .

Fråga:  $\text{in}(2, L)$ ,  $\text{in}(1, L)$ .

- ▶  $\text{in}(2, L)$ .
  - ▶ skapar instans av första regeln:  $\text{in}(H1, [H1 \mid A1])$ .  
unifierar  $H1=2$ ,  $L=[2 \mid A1]$
- ▶  $\text{in}(1, [2 \mid A1])$ .
  - ▶ skapar instans av första regeln:  $\text{in}(H2, [H2 \mid A2])$ .  
misslyckas med unifieringen
  - ▶ skapar instans av andra regeln:  
 $\text{in}(X1, [A3 \mid T1]) \text{ :- } \text{in}(X1, T1)$ .  
unifierar  $X1=1$ ,  $A3=2$ ,  $T1=A1$ 
    - ▶  $\text{in}(1, A1)$ .
    - ▶ skapar instans av första regeln:  $\text{in}(H3, [H3 \mid A4])$ .  
unifierar  $H3=1$ ,  $A1=[1 \mid A4]$



# Kontrollflödet vid $\text{in}(2, L)$ , $\text{in}(1, L)$ .

Fråga:  $\text{in}(2, L)$ ,  $\text{in}(1, L)$ .

- ▶  $\text{in}(2, L)$ .
  - ▶ skapar instans av första regeln:  $\text{in}(H1, [H1 \mid A1])$ .  
unifierar  $H1=2$ ,  $L=[2 \mid A1]$
- ▶  $\text{in}(1, [2 \mid A1])$ .
  - ▶ skapar instans av första regeln:  $\text{in}(H2, [H2 \mid A2])$ .  
misslyckas med unifieringen
  - ▶ skapar instans av andra regeln:  
 $\text{in}(X1, [A3 \mid T1]) :- \text{in}(X1, T1)$ .  
unifierar  $X1=1$ ,  $A3=2$ ,  $T1=A1$ 
    - ▶  $\text{in}(1, A1)$ .
    - ▶ skapar instans av första regeln:  $\text{in}(H3, [H3 \mid A4])$ .  
unifierar  $H3=1$ ,  $A1=[1 \mid A4]$

Svar:  $L = [2, 1 \mid A4]$

## Listkonkatenering: concatenate(X, Y, Z)

Ska vara sant om Z är konkateneringen av listan X med listan Y.

## Listkonkatenering: concatenate(X, Y, Z)

Ska vara sant om Z är konkateneringen av listan X med listan Y.

```
concatenate([], Y, Y).  
concatenate([HX | TX], Y, [HX | TZ]) :-  
    concatenate(TX, Y, TZ).
```

Strukturella induktionen är över listan X (dvs första argumentet).

Finns även inbyggd som append(X, Y, Z).

## Lägg till ett element: appendEl(X, L, NL)

Ska vara sant om listan NL är listan L med elementet X lagt till i slutet.

## Lägg till ett element: appendEl(X, L, NL)

Ska vara sant om listan NL är listan L med med elementet X lagt till i slutet.

```
appendEl(X, [], [X]).  
appendEl(X, [H | T], [H | Y]) :-  
    appendEl(X, T, Y).
```

Strukturella induktionen är över listan L (dvs andra argumentet).

## Listomvändning: `rev(X, Y)`

Ska vara sant om `Y` är omvända listan `X`.

## Listomvändning: `rev(X, Y)`

Ska vara sant om `Y` är omvända listan `X`.

```
rev([], []).  
rev([H | T], X) :-  
    rev(T, RT),  
    appendE1(H, RT, X).
```

Finns även inbyggd som `reverse(X, Y)`.

## Strängar

- ▶ Är symbolsekvenser.
- ▶ Representeras i PROLOG internt som listor av heltal. Varje tal representerar därmed en symbol (ASCII-koden).
- ▶ Inbyggda predikatet `atom_codes(X, Y)` är sant när `Y` är strängen (dvs heltalslistan) som motsvarar atomen `X`.



# Listsortering

Det finns många sätt att sortera listor. Här ska vi implementera **permutationssortering**, som illustration av hur vi kan använda backtracking som ett styrka för att åstadkomma ett programschema som kallas för **generera och testa**.

Vi utgår i det här fallet av logiska definitionen av sortering: att sortera en lista kan definieras formellt som att skapa (dvs beräkna) en sorterad permutation av ursprungliga listan. Vi kan använda denna definition direkt för att skapa ett PROLOG-program.

## Listsortering: permSort(+X, ?Y)

Programskelett:

```
permSort(X, Y) :-  
    permutation(X, Y),  
    sorted(Y).
```

Programmet använder predikatet `permutation(X, Y)` för att **generera** alla permutationer av en lista (en för en, genom backtracking), som sedan **testas** med predikatet `sorted(Y)` om de är sorterade eller inte.

## Del 1: permutation(+X, ?Y)

Ska vara sant om Y är en permutation av X.

Strukturella induktionen är på första listan X.

Vi utgår från följande logiska karakteriseringen av permutation:  
Y är en permutation av X om huvudet på X finns i Y, och om tagit bort från Y, resulterade listan är en permutation av svansen på X.

## Del 1: permutation(+X, ?Y)

Ska vara sant om Y är en permutation av X.

Strukturella induktionen är på första listan X.

Vi utgår från följande logiska karakteriseringen av permutation:  
Y är en permutation av X om huvudet på X finns i Y, och om tagit bort från Y, resulterade listan är en permutation av svansen på X.

```
permutation([], []).  
permutation([E | X], Y) :-  
    permutation(X, Y1),  
    append(Y2, Y3, Y1),  
    append(Y2, [E | Y3], Y).
```

## Del 2: sorted(X)

Definieras här bara för heltalslistor!

## Del 2: sorted(X)

Definieras här bara för heltalslistor!

```
sorted([]).  
sorted([X]).  
sorted([X, Y | L]) :-  
    X =< Y,  
    sorted([Y | L]).
```