SF1625 Envariabelanalys

Föreläsning 14

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

28 september 2016

Integraler

En begränsad f på $[a, b]$ är **integrerbar** om skillnaden mellan översumma och undersumma kan fås hur liten som helst genom val av partition.

Sats. Om f är kontinuerlig på $[a, b]$ så är f integrerbar på $[a, b]$

Om f är integrerbar, tänk **Riemannsumma:**

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n.$$

Exempel DTP från förra pdfen.

Integraler

Det går att räkna ut integraler med hjälp av (gränsvärden av) Riemannsummor. Om vi delar in $[0,1]$ i n delintervall och på varje delintervall tar funktionsvärdet i högra ändpunkten får vi:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\,dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Med hjälp av huvudsatsen blir beräkningen enklare.

Huvudsatsen

Analysens Huvudsats (the fundamental theorem of calculus).

Antag att f är kontinuerlig på $[a, b]$ Då gäller:

DEL 1. Funktionen $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ är en primitiv funktion till f, dvs $F'(x) = f(x)$.

DEL 2. Om G är någon primitiv funktion till f, så är

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a).$$

Bevis finns i boken och i filmen.

Beräkna dessa derivator:

A. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x \sin t\, dt$

B. $\dfrac{d}{du}\displaystyle\int_0^u \sin v\, dv$

C. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^0 \sin t\, dt$

D. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \sin t\, dt$

Bestämda och obestämda integraler

Observera att om f är integrerbar på $[a, b]$ så gäller att

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ är ett reellt tal.

Ovanstående kallas en bestämd integral. Vi inför en obestämd integral också, utan gränser. Den har en annan betydelse:

$\displaystyle\int f(x)\,dx$ betyder: en godtycklig primitiv funktion till f.

Huvudsatsen

Beräkna dessa integraler:

A. $\displaystyle\int_4^9 \sqrt{x}\,dx$

B. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

C. $\displaystyle\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

D. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx$

Eftersom det kan vara svårt att på rak arm komma på primitiva funktioner, så finns ett antal tekniker för att göra det. De viktigaste integrationsteknikerna är **variabelsubstitution** och **partiell integration.** För rationella funktioner är också **partialbråksuppdelning** bra att kunna.

Variabelsubstitution i integraler kommer från kedjeregeln för derivator. Partiell integration från produktregeln.

Variabelsubstitution.

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Villkor: g är deriverbar på $[a, b]$ och f är kontinuerlig på g:s värdemängd (när x varierar i $[a, b]$)

Bevis: Kedjeregeln för derivator

Exempel på variabelsubstitution

Beräkna integralerna med variabelsubstitution:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin x}\, dx$$

$$\int_1^{e} \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx$$

$$\int \tan x\, dx$$

Partiell integration.

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx.$$

Villkor: F och g har kontinuerliga derivator på $[a,b]$ och $F' = f$

Bevis: Produktregeln för derivator

Beräkna integralerna med partiell integration:

$$\int_1^e x \ln x \, dx$$

$$\int_0^{\pi/3} x \cos x \, dx$$

$$\int_0^{\ln 3} x e^x \, dx$$

$$\int \ln x \, dx$$