KTH Matematik
Hans Thunberg

SF1661 Perspektiv på matematik

**Kompletterande text till *What is mathematics?*, sid 272 -289, om funktionsbegreppet. Moderna beteckningar och svensk terminologi.**

**Definition 1.** En *funktion* $f : S \to T$ är en regel som till varje element $x \in S$ associerar precis ett element $y = f(x) \in T$. Mängden $S$ utgör funktionens *definitionsmängd* och betecknas också $D_f$. Mängden $T$ kallas för funktionens *målmängd* (den mängd funktionen ”siktar på”).

**Exempel 1.** Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, vara den vanliga sinusfunktionen, $y = f(x) = \sin x$. Eftersom den är definierad för alla reela tal är $D_f = \mathbb{R}$. Målmängden kan tas som de reella talen, eftersom $\sin x$ är ett reellt tal för varje reellt värde på $x$.

Vi hade ju också kunnat ha en mindre målmängd, eftersom $\sin x$ bara antar värden i intervallet $[-1, 1]$.

För att komma bort från otydligheten med begreppet målmängd inför vi begeppet *värdemängden* till $f$, $V_f$, som är den delmängd av målmängden, $V_f \subset T$, som består av precis de $y \in T$ som ”träffas” av något $x$ när $f$ ”skjuter iväg” $x \in D_f$ till $f(x) \in T$.

**Definition 2.** Värdemängden $V_f$ till en funktion $f : S \to T$ är den delmängd av målmängden $T$ som ges av

$$V_f = \{y \in T : y = f(x) \text{ för något } x \in S = D_f\}.$$

För funktionen i Exempel 1 är alltså $V_f = [-1, 1]$.

Att man ändå behåller begreppet målmängd beror bland annat på att det ibland är svårt att precisera precis vilken värdemängden är.

**Exempel 2.** Låt $S = \{0, 1, 2, 3\}$ och låt $T = \{a, b, c, d\}$. Vi definierar : $S \to T$ genom

$$f(0) = a, f(1) = b, f(2) = c, f(3) = a.$$

$S = \{0, 1, 2, 3\}$ är då definitionsmängd, $T = \{a, b, c, d\}$ är målmängd och $V_f = \{a, b, c\}$ är värdemängd (elementet $d \neq f(x)$ för alla $x$ i $D_f$).

---

I definitionen av begreppet funktion ingår att varje $x$ ska avbildas på ett och endast ett funktionsvärde $y$, det vill säga, det gäller alltid att

$$f(a) \neq f(b) \implies a \neq b.$$

Omvändingen gäller inte alls alltid, tänk till exempel på funktionen $f(x) = x^2$. Om omvändingen faktistk gäller för en viss funktion är det en viktig egenskap hos funktionen.

**Definition 3.** En funktion $f : S \to T$ kallas *injektiv* (eng. *injective*, *one-to-one*).om olika element i definitionsmängden $D_f = S$ avbildas på olika element i värdemängden $V_f \subset T$, det vill säga om

$$a \neq b \implies f(a) \neq f(b), \forall a, b \in D_f.$$

**Definition 4.** En funktion $f : S \to T$ kallas *surjektiv* ( eng.*onto*, *surjective*) om varje element i målmängden $T$ är bilden av något element i definitionsmängden $D_f = S$, det vill säga om

$$\forall y \in T, \exists x \in S : y = f(x).$$

Med andra ord är en funktion surjektiv precis när $T = V_f$, det vill säga när målmängd och värdemängd sammanfaller.

**Definition 5**. En funktion som är både injektiv och surjektiv kallas *bijektiv* ( eng. "*biunique* ", "*bijective*").

**Exempel 3.** Låt $X = \{$Studenter registrerade på CLGYM åk 1 hösttermein 2016 $\}$, låt $Y = \mathbb{N}$, de naturliga talen och definera

$$f : X \to Y, \quad y = f(x) = \text{"}x\text{:s tiosiffriga personnummer"}.$$

Denna funktion är injektiv (eftersom alla har olika personnummer) men inte surjektiv (eftersom det finns naturliga tal som inte är någons personnummer). Värdemänden består av av de tio-siffriga tal som är någon students personummer.

**Exempel 4.** Funktionen i Exempel 2 är inte injektiv ty $f(0) = c = f(3)$. Den är inte heller surjektiv eftersom $f(x) \neq d$ för alla $x \in D_f$.

**Exempel 5.** Funktionen $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $y = \sin x$ är surjektiv, eftersom varje tal i intervallet $[-1, 1]$ är sinusvärdet för någon vinkel $x$, men den är inte injektiv eftersom som till exempel $\sin \frac{\pi}{4} = \sin \frac{3\pi}{4}$.

**Exempel 6.** Låt $q : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ ges av $q(x) = x^2$. Denna funktion $q$ är inte injektiv eftersom $q(-a) = q(a)$, men däremot är $q$ surjektiv eftersom det till varje $y \in Y = [0, \infty]$ finns minst ett $x \in X = \mathbb{R}$ sådant att $y = q(x) = x^2$, nämligen $x = \pm\sqrt{y}$.

**Exempel 7.** Funktionen $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = h(x) = 2x$, är både

- injektiv, eftersom om $a \neq b$ så är också $2a \neq 2b$ , och
- surjektiv, eftersom till varje $y$ i målmängden finns ett $x$ i definitionsmängden sådant $y = 2x$, och
- därmed också bijektiv.

Observera att om vi ändrar definitionsmängd eller målmängden så betraktar vi det formellt som en ny funktion, även om den ges av samma regel eller formel. Vi kan till exempel göra om funktionen $f$ i Exempel 3 till en surjektiv funktion $g$ genom att helt enkelt definera om målmängden till att bestå av precis värdemängden, $g : X \to V_g, \quad y =$ "$x$:s tiosiffriga personnummer", där

$$V_g = \{\text{Förekommande personummer i CLGYM åk 1 höstermien 2015}\}.$$

Alla funktioner kan på detta sätt definieras om så att de blir surjektiva genom att välja "rätt" målmängd (= värdemängden).

Vi kan också göra om funktionen $q$ i Exempel 6 till en injektiv funktion $p$ genom att inskränka definitionsmängden,

$$p : [0, \infty] \to [0, \infty], \quad p(x) = x^2.$$

Funtkionen $p$ är också surjektiv och därmed alltså bijektiv.

---

Vi har tidigare i kursen talat om mängders kardinalitet. Vi sa då lite informellt att två mängder har samma kardinatlitet om elementen i mängderna kan paras ihop så att inget element blev över. För ändliga mängder betydde det precis att de hade lika många element. Med de begrepp vi nu har kan vi mer precist formulera definitionen på följande sätt.

**Definition 6.** Två mängder $S$ och $T$ har samma kardinalitet om det finns en bijektiv funktion $f : S \to T$.

**Exempel 8.** Den bijektiva funktionen $g : \mathbb{N} \to \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$ som ges av $g(n) = 2n$ visar att mängden av de jämna naturliga talen har samma kardinalitet som hela $\mathbb{N}$. På sidan 80 i *What is mathematics* bevisas att de (positiva) rationella talen $\mathbb{Q}_+$ också har samma kardinalitet som $\mathbb{N}$, beviset utgörs, kan vi se nu, av att konstruera en bijektiv funktion mellan mängderna, där varje tal i $\mathbb{Q}_+$ tilldelas precis ett naturligt tal (se figur på sidan 80 i *What is mathematics*).

---

**Inverterbara funktioner och deras inverser**

Om vi utgår från en bijektiv funktion $f : S \to T$ är elementen i $S$ och $T$ alltså kopplade parvis med hjälp av funktionen $f$, till varje $x \in S$ finns precis ett $y \in T$ sådant att $y = f(x)$ (eftersom $f$ är en funktion), men det är också sant att det till varje $y \in T$ finns precis ett $x \in S$ sådant $y = f(x)$, eftersom $f$ är både surjektiv och injektiv.

**Exempel 9** Vi modifierar nu funktionen i Exempel 2 till en funktion $g : S = \{0, 1, 2, 3\} \to T = \{a, b, c, d\}$ som är bijektiv,

$$g(0) = a, g(1) = b, g(2) = c, g(3) = d.$$

Vi kan bildligt skriva det som

$$0 \xrightarrow{g} a, 1 \xrightarrow{g} b, 2 \xrightarrow{g} c, 3 \xrightarrow{g} d.$$

Att $g$ är injektiv betyder att inget element i $T = \{a, b, c, d\}$ har mer än en pil som pekar på sig. Att $g$ är surjektiv betyder att varje element i $T = \{a, b, c, d\}$ har minst en pil som pekar på sig. Att $g$ är bijektiv innebär att bägge dessa villkor är uppfyllda, dvs att det pekar precis en pil på varje element i $T$. Att det utgår precis en pil från varje element i $S$ följer redan av att $g$ är en funktion.

Vi kan nu vända på pilarna och få en ny funktion $h$ som går åt andra hållet, $h : T \to S$.

$$0 \xleftarrow{h} a, 1 \xleftarrow{h} b, 2 \xleftarrow{h} c, 3 \xleftarrow{h} d.$$

Eftersom $g$ var surjektiv blir inget element i $T$ utan pil, det vill säga $h$ är definierad för alla $y \in T$; eftersom $g$ är injektiv startar det precis en pil i varje element i $T$, så $h$ är en regel som associerar precis ett funktionsvärde till varje element i $T$. Observera att $g$ och $h$ "tar ut" varandra , till exempel $h(g(1)) = 1$ och $g(h(b) = b$, och motsvarande för övriga par av element.

**Definition 7.** En funktion $f : S \to T$ kallas *inverterbar* om man kan "vända på pilarna" på detta sätt, mer precist om det finns en funktion $h : T \to S$ sådan att

$$h(f(x) = x, \forall x \in S \quad \text{och} \quad f(h(y) = y, \forall y \in T.$$

$h$ kallas $f$:s invers, och betecknas vanligen $h = f^{-1}$, och $f$ är då också $h$:s invers, $f = h^{-1}$.

En funktion är bijektiv om och endast om den är inverterbar. Sambanden mellan en bjektiv funktion $f : S \to T$ och dess invers $f^{-1} : T \to S$ kan också skrivas.

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Det följer också direkt att $D_{f^{-1}} = V_f$ och att $V_{f^{-1}} = D_f$.

För att visa en att en funktion är inverterbar ska vi alltså visa att den är bijektiv. Ett sätt att visa det på är att visa att ekvationen $y = f(x)$ har en och endast en lösning $x$ för varje $y$ i målmängden. Lyckas vi lösa ut $x$ entydig för ett godtycklig $y$ i målmängden är funktionen inverterbar och vi har på köpet fått en formel för $f^{-1}$.

**Exempel 10.** Vi visar att $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $y = 2x - 1$ är inverterbar och bestämmer den inversa funktionen $f^{-1}$.

$$y = f(x) = 2x - 1 \iff y + 1 = 2x \iff x = \frac{y+1}{2} = f^{-1}(y).$$

Alltså är $f^{-1}(y) = \dfrac{y+1}{2}$. Vi kan sedan byta namn på variabeln, så att vi som vanligt får $x$ som oberoende variabel, och skriva $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{2}$.

**Exempel 11.** Funktionen $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = h(x) = 2x$ i Exempel 3, såg vi var bijektiv och därmed inverterbar. Vi kan bestämma dess invers genom att lösa ut $x = \frac{y}{2}$, så $h^{-1}(y) = \frac{y}{2}$.

Genom att byta namn på variablerna kan vi skriva $y = h^{-1}(x) = \frac{x}{2}$.

För funktioner $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ finns ett villkor som garanterar att funktionen är injektiv: Funktionen $f$ sägs vara strikt växande om $x_1 > x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$ för alla $x_a, x_2 \in D_f$ och $f$ sägs vara strikt avtagande om $x_1 > x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$ för alla $x_a, x_2 \in D_f$ . Om $f$ är strikt avtagande eller strikt växande följer att $f$ är injektiv (varför då? ). Så om $f$ också är surjektiv, vilket vi alltid kan åstadkomma genom att inskränka målmängden, är $f$ också inverterbar.

**Exempel 12.** Vi konstaterade tidigare att funktionen

$$p : [0, \infty] \to [0, \infty], \quad p(x) = x^2$$

är injektiv, men att injektiviteten går förlorad om vi utsträcker definitionsmängden till att omfatta negativa tal: $[0, \infty]$ är det största intervall på vilket funktionsuttrycket $x^2$ är växande.

Eftersom $p$ också är surjektiv är $p$ bijektiv och alltså inverterbar. Dess invers ges av $y = \sqrt{x}$.

**Exempel 13.** Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$ är en strikt växande funktion och därmed bijektiv och alltså inverterbar. Dess invers ges av $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.