

Kort om exponentialfunktioner, logaritmer och potensfunktioner

1. EXPONENTIALFUNKTIONER OCH LOGARITMER

I ett uttryck av formen a^b kallas a för *bas* och b för *exponent*.

Om vi låter exponenten vara en variabel och $a > 0$ fås *exponentialfunktioner* $f(x) = a^x$. (Vanligen kräver man också att $a \neq 1$). Sådana studerar man till exempel i gymnasiekurserna, och begreppet ”exponentiell tillväxt” är vanligt förekommande i olika tillämpningar, så exponentialfunktioner är i den mening ett välkänt begrepp som vi kanske tar för självklart. Men vad menar vi egentligen med uttrycket a^x ?

Om x är ett positivt heltal ger själva definitionen av potenser att $a^x = a \cdot a \cdot a \cdots a$ (x stycken faktorer). Som vi diskuterat tidigare i kursen kan man ur denna definition lätt visa de tre potenslagarna

$$\text{P1: } r^x r^y = r^{x+y}, \quad \text{P2: } (r^x)^y = r^{xy}, \quad \text{P3: } \frac{r^x}{r^y} = r^{x-y},$$

för positiva heltalsexponenter. De mönster som potenslagarna bildar leder sedan fram till lämpliga definitioner av uttrycket a^x för positiva baser och rationella exponenter - definitioner sådana att P1 – P3 fortsätter att gälla.

Men när vi vill utvidga potensbegreppet till att omfatta även irrationella exponenter blir det knepigare. Hur ska vi exempelvis definiera $3^{\sqrt{2}}$ eller $2^{-\pi}$? Det finns två olika sätt att tänka på detta.

I. Från potenser till exponentialfunktioner till logaritmer. Det intuitivt kanske enklaste är att tänka sig a^x för irrationella värden på x definieras genom att approximera den irrationella exponenten x med rationella tal, och tänka på a^x som definierat av ett gränsvärde av sådana approximationer. Kom ihåg att ett irrationellt tal kan approximeras med godtycklig noggrannhet av rationella tal genom att ta med fler och fler decimaler i decimalbråksutvecklingen. Så approximeras till exempel $\sqrt{2}$ med stigande precision av talen 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, 1.414213, Vi kan därför tänka på $a^{\sqrt{2}}$ som det tal som är gränsvärdet av följden

$$3^1, 3^{1.4}, 3^{1.41}, 3^{1.414}, 3^{1.4142}, 3^{1.41421}, 3^{1.414213}, \dots$$

Man kan visa att den funktionen a^x , $0 < a \neq 1$, man får på detta sätt är definierad för alla $x \in \mathbb{R}$. Om $0 < a < 1$ är a^x strikt avtagande, och om $a > 1$ är a^x strikt växande. Man kan också bevisa att potenslagarna nu gäller för godtyckliga reella exponenter, det vill säga även för irrationella exponenter. Eftersom funktionen a^x är strikt växande, eller avtagande, är den också inverterbar på sin värdemängd. Inversfunktionen kallar vi $\log_a x$.

Inversen till e^x är den naturliga logaritmen $\ln x$. Logaritmlagarna för logartimfunktionerna blir en direkt konsekvens av potenslagarna för exponentialfunktionerna.

Uppgift 1. Utgå ifrån de tre potenslagarna P1 – P3 och bevisa att de tre logartimlagarna

$$L1: \quad \ln uv = \ln u + \ln v, \quad L2: \quad \ln u^t = t \ln u, \quad L3: \quad \ln \frac{u}{v} = \ln u - \ln v,$$

gäller för alla positiva reella tal u och v och alla reella tal t .

II. Från logartimer till exponetialfunktioner och potenser. En alternativ väg att definiera exponentialfunktioner och logaritmer skisseras i *What is Mathematics*, sidorna 442 – 447, en väg som är lättare att göra logiskt vattentät och som också bättre återspeglar den historiska utvecklingen av begreppen. Här definieras först $\ln x$ som arean under kurvan $y = 1/t$ mellan 1 och x , varpå man visar att denna funktion har precis de egenskaper som logaritmer ”ska ha”, speciellt visar man utifrån denna integraldefinition att L1 – L3 gäller, och att denna funktion är strikt växande och därmed inverterbar. Talet e definieras som det tal som är sådant att $\ln e = 1$, och man visar att inversfunktionen till $\ln$ -funktionen får formen e^x och uppfyller potenslagarna P1 – P3. Man kan sedan gå vidare att definiera exponentialfunktioner och logaritmer med andra baser.

I detta scenario fås alltså logaritmlagarna som en konsekvens av definitionen $\ln x := \int_1^x \frac{1}{t} dt$, och potenslagarna i sin tur fås som en konsekvens av logaritmlagarna.

Uppgift 2. Utgå ifrån logaritmlagarna L1 – L3 och bevisa potenslagarna P1 – P3.

2. NÅGRA ÖVNINGSUPPGIFTER PÅ EXPONENTIALFUNKTIONER OCH LOGARITMER

Uppgift 3. Skissera för hand i samma koordinatsystem funktionsgraferna $y = (\frac{1}{2})^x$, $y = 2^x$ och $y = 4^x$.

- Hur förhåller sig de tre kurvorna till varandra? Var skär de varandra? Vilka kurvor ”ligger överst”, ”i mitten” och ”underst” på olika intervall?
- Förklara varför $y = (\frac{1}{2})^x$ och $y = 2^x$ är varandras spegelbilder i y -axeln.
- Hur måste värdet på x ändras för att värdet på 2^x ska fördubblas respektive halveras?
- Hur måste värdet på x ändras för att värdet på 4^x ska fördubblas respektive halveras?

Uppgift 4. a) Skissera graferna $y = e^x$ och $y = \ln x$ i samma koordinatsystem, och markera speciellt punkterna $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, e)$, $(e, 1)$, $(1/e, -1)$ och $(-1, e)$.

b) Bevisa att följande påstående: *Punkten (a, b) ligger på grafen $y = e^x$ om och endast om punkten (b, a) ligger på grafen $y = \ln x$.*

Uppgift 5. Lös ekvationerna

$$a) \quad e^{2x} = 8e^{-x} \quad b) \quad 2^x = 3^x/4 \quad c) \quad 4 + \log_2 x = \log_2 x^2 \quad d) \quad \ln x + \ln(x+1) = a, a \in \mathbb{R}$$

Uppgift 6. a) Visa att $(\log_a b)(\log_b c) = \log_a c$ för positiva tal $a, b, c \in \mathbb{R}$.

b) Använd resultatet i a) för att visa att $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ för alla positiva reella tal a och x .

3. POTENSFUNKTIONER

Om vi istället väljer basen i ett potensuttryck a^b som variabel får vi de så kallade *potensfunktionerna* $f(x) = x^b$. Dessa är i allmänhet definierade endast för $x > 0$, men för vissa värden på b kan de definieras för alla $x \in \mathbb{R}$ eller för alla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Observera också att för vissa värden på b så är potensfunktionen x^b ett polynom ($b \in \mathbb{N}$), en rationell funktion ($b \in \mathbb{Z}$) eller en rotfunktion ($b = 1/n$, $n \in \mathbb{Z}_+$).

Uppgift 7. Ange största möjliga definitionsmängd till var och en av följande potensfunktioner. Skissera också funktionernas grafer i ett gemensamt koordinatsystem så att man ser hur de förhåller sig till varandra.

$$\text{a) } y = x^2 \quad \text{b) } y = x^{1/2} \quad \text{c) } y = x^{1/3} \quad \text{d) } y = x^3 \quad \text{e) } y = x^{3/2}$$

Vilka av funktionerna är inverterbara, och i vilka är i sådana fall deras inverser?

Uppgift 8. Ange största möjliga definitionsmängd till var och en av följande potensfunktioner. Skissera också funktionernas grafer i ett gemensamt koordinatsystem så att man ser hur de förhåller sig till varandra.

$$\text{a) } y = x^{-1} \quad \text{b) } y = x^{-2} \quad \text{c) } y = x^{-1/2}$$

Uppgift 9. Skissera följande funktionsgrafer

$$\text{a) } y = (x - 2)^{-1} \quad \text{b) } y = (x + 3)^{-2} - 1 \quad \text{c) } y = (x + 1)^{-1/2} + 2$$