Kontrollskrivning 2, version A,
i SF1633 Differentialekvationer I.
fredag 23 september 2016, klockan 13:15 - 15:00

LÖSNINGSFÖRSLAG

1) Lösning

a) Den homogena DE $y'' + y = 0$ har den karakteristiska ekv $r^2 + 1 = 0$ som har rötterna $r = \pm i$. Således är

$$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t \tag{1}$$

den allmänna lösningen. För att hitta en lösning till

$$y'' + y = \frac{1}{\sin t} \tag{2}$$

använder vi **variation av parameter**.Vi vet då att

$$y_p = u_1(t)\underbrace{\cos t}_{y_1} + u_2(t)\underbrace{\sin t}_{y_2} \tag{3}$$

är en lösning om

$$u_1' = -\frac{y_2 f(t)}{W}, \quad u_2' = -\frac{y_1 f(t)}{W} \tag{4}$$

$$W = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = 1 \tag{5}$$

där W är Wronski-determinanten. Vi får

$$u_1' = \frac{\frac{-\sin t}{\sin t}}{1} = -1 \implies u_1 = -t + C_1 \tag{6}$$

$$u_2' = \frac{\frac{\cos t}{\sin t}}{1} = \frac{\cos t}{\sin t} \implies u_2 = \ln|\sin t| + C_2 \tag{7}$$

Således är med $C_1 = C_2 = 0$ (t ex)

$$y_p = -t\cos t + \ln|\sin t|\sin t \tag{8}$$

en lösning till DE.

b) Vi verifierar att detta verkligen är en lösning. Vi har

$$y_p' = (-\cos t + t\sin t) + \frac{\cos t}{\sin t}\sin t + \ln|\sin t|\cos t \tag{9}$$

$$= t\sin t + \ln|\sin t|\cos t \tag{10}$$

$$y_p'' = (t\cos t + \sin t) + \frac{\cos t}{\sin t}\cos t - \ln|\sin t|\sin t \tag{11}$$

Detta ger att

$$y_p'' + y_p = \sin t + \frac{\cos^2 t}{\sin t} \tag{12}$$

$$= \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\sin t} = \frac{1}{\sin t} \tag{13}$$

v. s. v.

2) Lösning

Systemet kan skrivas på matrisform

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{X} \tag{14}$$

där $\mathbf{A}$ har egenvärden $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$.

Vektorn $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -i \end{bmatrix}$ är en egenvektor svarande mot egenvärdet $\lambda = -1 + 2i$.

Således är

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 \\ -i \end{bmatrix} \mathrm{e}^{(-1+2i)t} \tag{15}$$

en komplex lösning.

Vi vet att real- och imaginärdelen av denna lösning ger här två reella linjärt oberoende lösningar.

Vi har

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -i \end{bmatrix} \mathrm{e}^{(-1+2i)t} = \begin{bmatrix} 2 \\ -i \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-t}(\cos 2t + i \sin 2t) = \mathrm{e}^{-t} \begin{bmatrix} 2\cos 2t \\ \sin 2t \end{bmatrix} + i\mathrm{e}^{-t} \begin{bmatrix} 2\sin 2t \\ -\cos 2t \end{bmatrix} \tag{16}$$

Således är

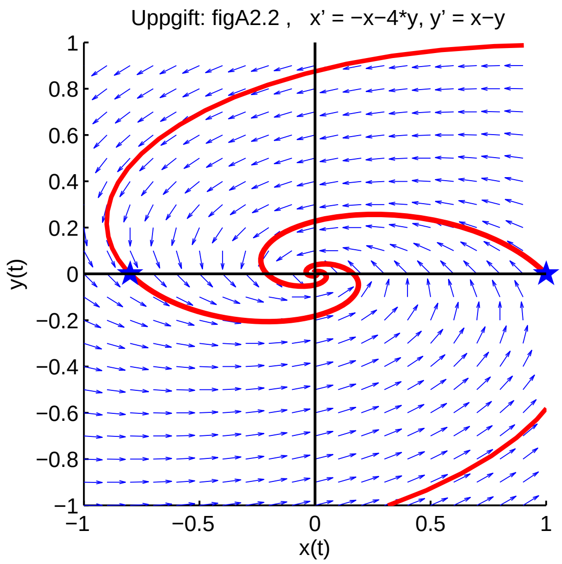
$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 2\cos 2t \\ \sin 2t \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} \text{ och } \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 2\sin 2t \\ -\cos 2t \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} \tag{17}$$

två linjärt oberoende lösningar.

Eftersom $\mathbf{A}$ är en 2x2-matris så bildar därför $\mathbf{X}_1$ och $\mathbf{X}_2$ en fundamental lösningsmängd.

Den allmänna lösningen till systemet ges nu av

$$\boxed{\mathbf{X} = C_1\mathbf{X}_1 + C_2\mathbf{X}_2 \quad C_1, C_2 \text{ konst}}$$



3) Lösning

De kritiska punkterna ges av

$$xy - 2 = 0 \tag{18}$$
$$x - 2y = 0 \tag{19}$$

$x = 2y$ insatt i ekv(18) ger $y = \pm 1$ och ekv(19) leder då direkt till de kritiska punkterna $(1, 2)$ och $(-1, -2)$.
Med Jacobi-matrisen

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{bmatrix} y & x \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \tag{20}$$

undersöker vi nu stabiliteten.
Matrisen

$$\mathbf{J}(1, 2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \tag{21}$$

har egenvärden $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{5}$ och $\sqrt{5} > 0$ innebär att $(1, 2)$ är en instabil kritisk punkt, en sadelpunkt.
Matrisen

$$\mathbf{J}(-1, -2) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \tag{22}$$

har egenvärden $\lambda_{1,2} = -2 \pm i > 0$. Realdelen är negativ, alltså är $(-1, -2)$ en stabil kritisk punkt, en spiralpunkt.