Kontrollskrivning 2, version A,
i SF1633 Differentialekvationer I.
fredag 23 september 2016, klockan 10:15 - 12:00

LÖSNINGSFÖRSLAG

1) Lösning

a) Vi ser snabbt att $y_1 = x$ är en lösning och söker ytterligare en lösning på formen $y = u(x)x$. Vi får då

$$y' = u'x + u \quad \textit{och} \quad y'' = u''x + 2u'. \tag{1}$$

Insättning i DE ger

$$0 = x^3(u''x + 2u') - x(x+2)(u'x + u) + (x+2)ux = x^3u'' - x^3u' \tag{2}$$

Faktum att $x > 0$, enligt text, leder oss till $u'' - u' = 0$.
Låt $v = u'$. Då fås ekv $v' - v = 0$ som har lösningen $v = C_1\mathrm{e}^x$. Således $u = C_1\mathrm{e}^x + C_2$. Tar vi $C_1 = 1$ och $C_2 = 0$. Eftersom $y_1 = x$ och $y_2 = x\mathrm{e}^x$ är linjärt oberoende på I så måste den allmänna lösningen vara

$$\boxed{y = Ax\mathrm{e}^x + Bx}$$

b) Vi verifierar att $y = Ax\mathrm{e}^x + Bx$ verkligen är en lösning till DE genom att derivera och sätta in i DE samt då förkorta $x + 2$

$$y' = A(x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x) + B, \quad y'' = A\mathrm{e}^x(x+2) \Longrightarrow \tag{3}$$

och får efter en del enkla räkningar att $y = Ax\mathrm{e}^x + Bx$ verkligen är en lösning till DE.

2) Lösning

Systemet kan skrivas på matrisform

$$\mathbf{X}' = \mathbf{AX} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{X} \tag{4}$$

där $\mathbf{A}$ har egenvärden $\lambda_1 = 1$ och med $\lambda_2 = -1$ med motsvarande egenvektor $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Således är

$$\mathbf{X} = C_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^t + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} \tag{5}$$

den allmänna lösningen till det homogena systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$.
Vi söker nu en partikulär lösning $\mathbf{X}_p$ på formen $\mathbf{X}_p = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.
Insättning i systemet ger

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \tag{6}$$

vilket medför att $a = 1$ och $b = 2$.
Alltså, den allmänna lösningen till det givna systemet är

$$\boxed{\mathbf{X} = C_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^t + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad C_1, C_2 \text{ konst}}$$

---

3) Lösning

De kritiska punkterna ges av

$$\begin{aligned} 1 - xy &= 0 \qquad (7) \\ x - y^3 &= 0 \qquad (8) \end{aligned}$$

$x = y^3$ insatt i ekv(7) ger $y^4 = 1$ som har de reella lösningarna $y = \pm 1$. Ekv(8) leder då direkt till de kritiska punkterna $(1, 1)$ och $(-1, -1)$.
Undersökning av stabilitet:
Vi har Jacobi-matrisen

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{bmatrix} -y & x \\ 1 & -3y^2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

. Matrisen

$$\mathbf{J}(1, 1) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \tag{10}$$

har (det multipla) egenvärdet $\lambda = -2$. Eftersom detta är negativt så är den kritiska punkten $(1, 1)$ stabil. Matrisen

$$\mathbf{J}(-1, -1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \tag{11}$$

har egenvärden $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{5}$. Eftersom $\sqrt{5} - 1 > 0$ så är den kritiska punkten $(-1, -1)$ instabil.
