Kontrollskrivning 2, version A,
i SF1633 Differentialekvationer I.
onsdag 28 september 2016, klockan 15:15 - 17:00

LÖSNINGSFÖRSLAG

1) Lösning

a) Systemet kan på matrisform skrivas som

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X} \text{ och } \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \tag{1}$$

Matrisen har egenvärden $\lambda = 1 \pm i$.
Vektorn $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$ är då egenvektorn motsvarande egenvärdet $\lambda = 1+i$. Således är

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{(1+i)t} \tag{2}$$

en komplex lösning.
Vi vet att real- och imaginärdelen av denna lösning ger här två reella linjärt oberoende lösningar.
Vi har

$$\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{(1+i)t} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{t}(\cos t + i \sin t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \mathrm{e}^{t} + i \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \mathrm{e}^{t} \tag{3}$$

Alltså är

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \mathrm{e}^{t} \text{ och } \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \mathrm{e}^{t} \tag{4}$$

två oberoende lösningar. Således är

$$\boxed{\mathbf{X} = c_1 \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \mathrm{e}^{t} + c_2 \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \mathrm{e}^{t}, \quad c_1, c_2 \text{ konst}}$$

den allmänna lösningen till systemet.

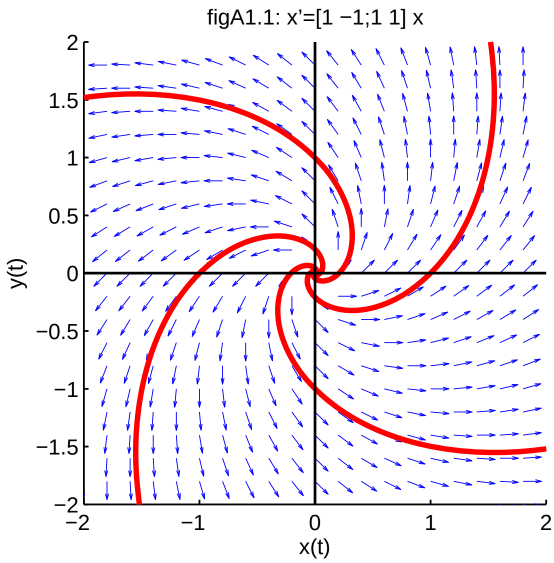
b) Vi verifierar att $\mathbf{X}_1$ och $\mathbf{X}_2$ är lösningar. Då följer från superposition att $c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2$ är också är en lösning eftersom systemet är homogent.
Vi har

$$\mathbf{X}_1' = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \mathrm{e}^{t} + \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \mathrm{e}^{t} \tag{5}$$

och

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \mathrm{e}^{t} = \begin{bmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t + \sin t \end{bmatrix} \mathrm{e}^{t} = \mathbf{X}_1' \tag{6}$$

$\mathbf{X}_2$ verifieras p s s .



2) Lösning

a) Vi använder **reduktion av ordning** och söker ytterligare en lösning på formen $y = u(x)\mathrm{e}^x$. Vi får då

$$y' = u'\mathrm{e}^x + u\mathrm{e}^x \quad och \quad y'' = u''\mathrm{e}^x + 2u'\mathrm{e}^x + u\mathrm{e}^x. \tag{7}$$

Insättning i DE ger

$$\begin{aligned} 0 &= x(u''\mathrm{e}^x + 2u'\mathrm{e}^x + u\mathrm{e}^x) - (2x+1)(u'\mathrm{e}^x + u\mathrm{e}^x) + (x+1)u\mathrm{e}^x & (8)\\ &= xu''\mathrm{e}^x - u'\mathrm{e}^x & (9) \end{aligned}$$

som kan skrivas $xu'' - u' = 0$
Låt $v = u'$. Då fås ekv $xv' - v = 0$ som har lösningen $v = C_1x$. Således $u = C_2x^2 + C_3$. Tar vi $C_2 = 1$ och $C_3 = 0$ ser vi att $y = x^2\mathrm{e}^x$ är en lösning till DE.
Eftersom $y_1 = \mathrm{e}^x$ och $y_2 = x^2\mathrm{e}^x$ är linjärt oberoende på I och DE linjär av ordning 2, så följer att den allmänna lösningen är

$$\boxed{y = A\mathrm{e}^x + Bx^2\mathrm{e}^x}$$

b) Vi verifierar att y_1 och y_2 verkligen är linjärt oberoende, m h a Wronski - determinanten.

$$\mathbf{W} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^x & x^2\mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^x & 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x \end{vmatrix} = 2x\mathrm{e}^{2x} \neq 0, \text{ för alla x>0} \tag{10}$$

Alltså är y_1 och y_2 linjärt oberoende på $I =]0, \infty[$.

3) Lösning

a) Om vi låter $y = x'$ kan vi skriva

$$\begin{aligned} x' &= y & (11)\\ y' &= x'' = -x' - x + x^3 = -y - x + x^2 & (12) \end{aligned}$$

d v s **vi får systemet**

$$\begin{aligned} x' &= y \qquad (13)\\ y' &= -x + x^2 - y \qquad (14)\end{aligned}$$

b) De kritiska punkterna ges av $x' = y' = 0$ samtidigt

$$\begin{aligned} 0 &= y \qquad (15)\\ 0 &= -x + x^2 - y \qquad (16)\end{aligned}$$

Vi måste alltså ha $y = 0$ och $x(x-1) = 0$, som ger de kritiska punkterna $(1,0)$ och $(0,0)$.
Sambanden ekv(13) och ekv(14) ger Jacobimatrisen

$$\mathbf{J}(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1+2x & -1 \end{bmatrix} \qquad (17)$$

Av detta följer

$$\mathbf{J}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (18)$$

som har egenvärdet $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Eftersom realdelen är negativ så är $(0,0)$ **en stabil kritisk punkt**(stabil spiral).
Vidare,

$$\mathbf{J}(1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (19)$$

som har egenvärden $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$.
Eftersom $\frac{\sqrt{5}-1}{2} > 0$ så är **den kritiska punkten** $(1,0)$ **instabil**.