KTH Matematik *B*

Kontrollskrivning 2, version B,
i SF1633 Differentialekvationer I.
onsdag 28 september 2016, klockan 15:15 - 17:00

---

1) Lösningsförslag

---

a) Reduktion av ordning $y = u\mathrm{e}^{-x}$ ger att $y_1 = \mathrm{e}^{-x}$ och $y_2 = x^2\mathrm{e}^{-x}$ är en fundamental lösningsmängd på $I =]0, \infty[$.

---

2) Lösningsförslag

---

a) Matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

har egenvärden $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Vektorn $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ är en egenvektor motsvarande $\lambda_1 = 1 + i$.

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \mathrm{e}^t, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} \mathrm{e}^t \tag{2}$$

är en fundamental lösningsmängd, så svaret blir

$$\boxed{y = C_1 \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \mathrm{e}^t + C_2 \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} \mathrm{e}^t}$$

---

3) Lösningsförslag

Vi får systemet

$$x' = y \tag{3}$$
$$y' = -y + x + x^2 \tag{4}$$

som har de kritiska punkterna $(-1, 0)$ och $(0, 0)$.

$$\mathbf{J}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

har egenvärden $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. Ett positivt $\longrightarrow$ att $(0, 0)$ är instabil.

$$\mathbf{J}(-1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

har egenvärden $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Negativ realdel $\longrightarrow$ att $(0, 0)$ är stabil (spiral).
