

SF1625 Envariabelanalys

Föreläsning 16

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

3 oktober

Detta ska vi göra denna vecka

- Idag:
 - Generaliserade integraler
 - Översikt över kursen
- På onsdag och fredag:
 - Geometrisk tillämpningar av integraler
 - Andra tillämpningar av integraler

Partialbråksuppdelning. Knepiga fall

$$\int \frac{x + 11}{x^2(x - 1)} dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x - 1} \right) dx = \dots$$

$$\int \frac{2x + 1}{x(x^2 + 1)} dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} \right) dx = \dots$$

Dagens tentaproblem.

Beräkna arean av det område som ligger mellan kurvorna

$y = 1$ och $y = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 4x + 3}$, för x i intervallet $0 \leq x \leq R$. Vad händer med arean om vi låter $R \rightarrow \infty$?

Generaliserade integraler

Förra veckan studerade vi integraler över ändliga intervall och av funktioner som var begränsade.

Nu ska vi studera **generaliserade integraler**. Med det menas:

- A. Integraler över obegränsade intervall
- B. Integraler av funktioner som är obegränsade

Metoden för att studera dem är: **ta gränsvärdet**.

Får man ett gränsvärde (som är ett tal, inte ∞) så är den generaliserade integralen **konvergent**, annars **divergent**.

Integral över obegränsat intervall.

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx$$

Observera att integralen i högerledet är vanlig hederlig integral som ska räknas ut innan man tar gränsvärdet.

Exempel:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty e^{-x} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R e^{-x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_1^R \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} (-e^{-R} + e^{-1}) = e^{-1} \end{aligned}$$

Generaliserade integraler

Det gäller att

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ är konvergent (den blir ett tal)

och

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ är divergent (den blir oändlig)

Generaliserade integraler

Ofta kan man avgöra om en generaliserad integral är konvergent eller divergent utan att räkna ut den, till exempel genom att **jämföra** den med någon av ovanstående generaliserade integraler.

Antag att $0 \leq f(x) \leq g(x)$ på $[a, \infty)$. Då gäller följande:

1. $\int_a^\infty g(x) dx$ konvergent $\implies \int_a^\infty f(x) dx$ är konvergent

2. $\int_a^\infty f(x) dx$ divergent $\implies \int_a^\infty g(x) dx$ är divergent

Ytterligare ett tentaproblem.

Avgör om den generaliserade integralen

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + x} dx$$

är konvergent eller divergent. Om den är konvergent, beräkna den!

Obegränsad funktion

Om $f(x)$ är obegränsad när $x \rightarrow a$ så sägs integralen

$\int_a^b f(x) dx$ också vara generaliserad (fast det inte syns på gränserna). Motsv för b .

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx$$

Exempel

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$$

Envariabelanalys — bakgrund och motivation

$$v = \frac{s}{t} ?$$

$$A = \pi r^2 ?$$



En gammal tentauppgift

När luft expanderar adiabatiskt (utan värmeutbyte med omgivningen) uppfyller trycket p och volymen V sambandet

$$p \cdot V^{1.4} = \text{konstant}.$$

Vid en viss tidpunkt är trycket 5 atm och volymen 56 liter. Vid samma tidpunkt ökar volymen med hastigheten 4 liter per sekund. Hur snabbt ändras trycket vid denna tidpunkt ?

En uppgift som liknar en gammal tentauppgift:

En silo i form av en cylinder med radie 2 meter och höjd 9 meter är packad med ett material vars densitet på höjden x meter över bottenplattan ges av

$$d(x) = \frac{1}{20\sqrt{x+1}} \text{ kg/m}^3$$

Beräkna massan av innehållet i silon.

En seminarieuppgift:

Böjmotståndet W hos en balk med rektangulärt tvärsnitt med bredden b och höjden h ges av

$$W = \frac{bh^2}{6}.$$

Om man sågar en balk ur en rund trädstam med radien r , vilka mått ska balken ha om böjmotståndet ska maximeras?

Google maps:

A. Om man kör med en hastighet v km/h som varierar med tiden t timmar, hur långt kommer man mellan tiden $t = 0$ och tiden $t = 1$?

B. Om man kör med en hastighet v km/h som varierar med körsträckan s km, hur lång tid tar det att köra från den punkt då $s = 0$ till den punkt då $s = 100$?

En gammal tentauppgift:

Laddningen $q(t)$ i kondensatorn i en viss växelströmskrets uppfyller differentialekvationen

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2 \frac{dq}{dt} + 2q = 5 \cos t$$

med initialvillkoren $q(0) = 1$ och $q'(0) = 3$.

- A. Bestäm laddningen i kondensatorn vid tiden t .
- B. Beskriv vad som händer med laddningen i kondensatorn efter lång tid.