Institutionen för Matematik

SF1625 Envariabelanalys
Läsåret 2016-2017
Lars Filipsson

Modul 2
Mål och Sammanfattning

1. Mål för modul 2

Derivata.

- Förstå och använda derivatans definition
- Förstå och använda derivata i linjär approximation
- Förstå och använda deriveringsreglerna obehindrat
- Kunna derivera vanliga och ovanliga funktioner
- Förstå och använda implict derivering
- Förstå och använda högre ordningens derivator
- Förstå och använda medelvärdessatsen och dess följdsatser

Kort sagt: man måste bli otroligt bra på att derivera och på att använda derivatan för linjär approximation och för att avgöra om funktioner växer eller avtar mm.

2. Sammanfattning av modul 2

1. Derivatans definition. Om f är definierad i en omgivning av punkten a så säger vi att f är deriverbar i a om gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

existerar ändligt. Gränsvärdet kallas i så fall derivatan av f i a och skrivs $f'(a)$ eller $Df(a)$ eller $\frac{df}{dx}|_{x=a}$.

Observera att samma gränsvärde kan skrivas på många olika sätt. I tillämpningar skriver man ofta

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}.$$

En annan vanlig variant är

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Tolkningar. Om $f'(a)$ existerar är detta tal riktningskoefficienten för tangentlinjen till grafen $y = f(x)$ i den punkt på grafen som har x-koordinat a. Ekvationen för tangenten blir med enpunktsformeln för linjens ekvation

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Mer allmänt så ger oss derivatans definition ett sätt att approximera $f(x)$ för x nära a som kallas linjär approximation:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a), \qquad \text{för } x \text{ nära } a.$$

Derivatan $f'(a)$ är alltså ett mått på förändringstakten hos funktionen f i punkten a.

Vi såg att $f'(a)$ är riktningskoefficient för tangenten till funktionsgrafen i punkten $(a, f(a))$. Det betyder att normalen i samma punkt har riktningskoefficient $-1/f'(a)$.

Om vi i derivatans definition inskränker oss till att låta $h \to 0^+$ eller $h \to 0^-$ så får vi högerderivata respektive vänsterderivata.

De punkter där f är deriverbar är en delmängd av definitionsmängden för f. För en deriverbar funktion f blir då f' en ny funktion som mäter förändringstakten hos f. Om f' i sin tur är deriverbar får vi ännu en funktion f'' som mäter förändringstakten hos f'. Osv.

Om $f(t)$ anger positionen vid tidpunkten t så anger $f'(t)$ hastigheten och $f''(t)$ accelerationen.

Alla funktioner är inte deriverbara. Det finns kontinuerliga funktioner som inte är deriverbara. Till exempel är absolutbeloppsfunktionen inte deriverbar i origo. Däremot gäller följande:

Sats. Om f är deriverbar i a så är f kontinuerlig i a.

Bevis: Anta att f är deriverbar i a. Då gäller

$$\lim_{x\to a}(f(x) - f(a)) = \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)\right) = f'(a) \cdot 0 = 0,$$

vilket betyder att $f(x) \to f(a)$ då $x \to a$, dvs f är kontinuerlig i a.

Deriveringsregler. Om man varje gång man ville derivera skulle använda derivatans definition blev livet jobbigt. Man kan bevisa följande deriveringsregler som gör deriverandet lättare.

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(Cf(x)\right) = Cf'(x), \quad C \text{ konstant}\\
&\frac{d}{dx}\left(f(x) \pm g(x)\right) = f'(x) \pm g'(x)\\
&\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\\
&\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}, \quad \text{om } g(x) \neq 0
\end{aligned}$$

Reglerna gäller under förutsättning att f och g båda är deriverbara i den aktuella punkten. Den tredje kallas **produktregeln** och den fjärde för **kvotregeln**. Den viktiga **kedjeregeln** talar om hur man deriverar en sammansatt funktion:

$$\frac{d}{dx}\left(f(g(x))\right) = f'(g(x))g'(x)$$

Dessa deriveringsregler bevisas i boken. För att komma igång och derivera med hjälp av dem behövs dock först några grundläggande funktioners derivator som man en gång för alla tar fram med hjälp av derivatans definition. Det görs också i boken. Till exempel (kolla gärna upp detaljerna):

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}C = 0, \quad C \text{ konstant}\\
&\frac{d}{dx}x = 1\\
&\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}\\
&\frac{d}{dx}\sin x = \cos x\\
&\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x
\end{aligned}$$

Med hjälp av ovanstående derivator och deriveringsreglerna kan vi nu derivera andra funktioner, utan att använda definitionen varje gång. Till exempel:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x\\
&\frac{d}{dx}x\sin^2 x = \sin^2 x + 2x\sin x\cos x
\end{aligned}$$

Medelvärdessatsen. Om f är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på (a, b) så finns ett tal c mellan a och b så att

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Medelvärdessatsen ger den teoretiska grunden till många användningar av derivata. Innan vi formulerar dessa ska vi definiera några viktiga begrepp.

Definition.

Anta att f är definierad på ett intervall I. Om det för alla punkter x_1 och x_2 i I gäller att $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ så sägs f vara strängt växande i I.
Anta att f är definierad på ett intervall I. Om det för alla punkter x_1 och x_2 i I gäller att $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ så sägs f vara växande i I.
Anta att f är definierad på ett intervall I. Om det för alla punkter x_1 och x_2 i I gäller att $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ så sägs f vara strängt avtagande i I.
Anta att f är definierad på ett intervall I. Om det för alla punkter x_1 och x_2 i I gäller att $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ så sägs f vara avtagande i I.

Följdsats till medelvärdessatsen. Låt J vara ett öppet intervall (a, b) och låt I vara vilket som helst av intervallen (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$ och $[a, b]$. Anta att f är kontinuerlig på I och deriverbar på J. Då gäller:

Om $f'(x) > 0$ för alla x i J, så är f strängt växande i I

Om $f'(x) \geq 0$ för alla x i J, så är f växande i I

Om $f'(x) < 0$ för alla x i J, så är f strängt avtagande i I

Om $f'(x) \leq 0$ för alla x i J, så är f avtagande i I

Om $f'(x) = 0$ för alla x i J, så är f konstant i I

Följdsatsen säger alltså att man kan använda derivata för att avgöra om en funktion är (strängt) växande eller avtagande på ett intervall. Förutsättningen är förstås att funktionen är deriverbar.

Funktionen $f(x) = x^3$ är strängt växande på hela $\mathbf{R}$. Observera att detta inte motsäger satsen ovan.

Den viktiga tekniken **implicit derivering** visas i filmen till fredagens föreläsning. Missa inte den!