Institutionen för Matematik

SF1625 Envariabelanalys
Läsåret 2016-2017
Lars Filipsson

Modul 3
Mål och Sammanfattning

1. Mål för modul 3

Inversa funktioner, exp, log, arc. ODE.

- Räkna med exponential-, logaritm- och arcusfunktioner
- Använda derivata för exponential-, logaritm- och arcusfunktioner
- Använda potenslagar och loglagar
- Lösa linjära ordinära differentialekvationer med konstanta koefficienter
- Räkna på tillämpningar där allt det ovanstående kommer in

Kort sagt: Allt det vi lärde oss använda derivator till i modul 2 ska vi nu även kunna göra på exponential-, logaritm- och arcusfunktioner. Dessutom behöver vi nu kunna potenslagar och loglagar ordentligt. Vi ska också bli bra på att lösa linjära ordinära diffekvationer med konstanta koefficienter och använda dessa för att modellera problem i verkligheten.

2. Sammanfattning av modul 3

Injektiva funktioner avbildar alltid olika x på olika y, dvs:

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Ett annat sätt att säga exakt samma sak är:

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

För injektiva funktioner f definierar vi inversen f^{-1} genom

$$f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow y = f(x)$$

En inverterbar funktion och dess invers uppfyller alltid:

$f^{-1}(f(x)) = x$, för alla x i definitionsmängden för f

$f(f^{-1}(y)) = y$, för alla y i definitionsmängden för f^{-1}

Obs att definitionsmängden för f är värdemängden för f^{-1} och värdemängden för f är definitionsmängden för f^{-1}

Obs att strängt växande och strängt avtagande funktioner alltid är injektiva och alltså inverterbara.

Funktionsgraferna $y = f(x)$ och $y = f^{-1}(x)$ är varandras spegelbilder i linjen $y = x$

Exponentialfunktionen. Det finns en funktion $\exp(x) = e^x$ som är definierad för alla x och som har som värdemängd alla $y > 0$.

Vi har potenslagarna som gäller för alla s och t:

$e^s e^t = e^{s+t}$

$e^s/e^t = e^{s-t}$

$(e^s)^t = e^{st}$

$1/e^t = e^{-t}$

$e^0 = 1$

Exponentialfunktionen är deriverbar för alla x och

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x.$$

Exponentialfunktionen är strängt växande på hela reella axeln. Dessutom gäller:

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \quad \text{och} \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

Den naturliga logaritmen. Eftersom exponentialfunktionen är strängt växande är den injektiv och har därmed invers. Inversen kallas den naturliga logaritmfunktionen, skrivs ln.

Vi har alltså:

$$\ln y = x \Longleftrightarrow y = e^x$$

Det betyder att:

logaritmen för y är det tal man ska höja e till för att resultatet ska bli y.

Vi har logaritmlagarna som gäller för alla s och t större än 0:

$\ln(st) = \ln s + \ln t$

$\ln(s/t) = \ln s - \ln t$

$\ln(s^t) = t \ln s$

$\ln(1/t) = -\ln t$

$\ln 1 = 0$

Definitionsmängden för den naturliga logaritmfunktionen $\ln$ är alla positiva reella tal och värdemängden är alla reella tal.

Logaritmfunktionen $\ln x$ är deriverbar för alla $x > 0$ och

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

Den naturliga logaritmfunktionen är strängt växande för $x > 0$. Dessutom:

$$\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty \quad \text{och} \quad \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

Två självklara saker:

$\ln e^x = x$, för alla x.

$e^{\ln x} = x$, för alla $x > 0$

Om vi vill använda andra baser än talet e så kan vi göra så här:

$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$

Dvs a^x kan alltid skrivas som e^{kx} med nån konstant k. Här tänker vi oss att a är något positivt tal men inte 1. På liknande vis kan man översätta mellan logaritmer med olika baser.

Dessa standardgränsvärden måste man kunna ($a > 0$):

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$$

Talet e är ett specifikt reellt tal, det är inte rationellt, och det brukar definieras genom ett gränsvärde eller en serie:

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Ett annat sätt kan vara att först definiera exponentialfunktionen $\exp$ och sedan sätta $e = \exp(1)$.

Hur som helst gäller att $e \approx 2.71828$

Arcusfunktioner (inversa trigonometriska funktioner). Eftersom sinus, cosinus, tangens och cotangens är periodiska funktioner så kan de inte inverteras. Man skulle kunna tro att det var end of story men så är det inte. Om man **begränsar definitionsmängderna** till dessa funktioner så får man nämligen funktioner som går att invertera:

Funktionen $S(v) = \sin v,\ -\pi/2 \leq v \leq \pi/2$, är inverterbar och inversen heter $\arcsin$, eller $\sin^{-1}$.

Definitionen blir alltså:

$\arcsin t = v \iff t = \sin v$ och $-\pi/2 \leq v \leq \pi/2.$

Eller på ren svenska:

$\arcsin t$ är den vinkel (i intervallet $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) vars sinusvärde är t.

Defintionsmängden för $\arcsin$ är självfallet $[-1, 1]$ och värdemängden förstås $[-\pi/2, \pi/2]$.

Funktionen $C(v) = \cos v,\ 0 \leq v \leq \pi$, är inverterbar och inversen heter $\arccos$, eller $\cos^{-1}$.

Definitionen blir alltså:

$\arccos t = v \iff t = \cos v$ och $0 \leq v \leq \pi.$

Eller på ren svenska:

$\arccos t$ är den vinkel (i intervallet $[0, \pi]$) vars cosinusvärde är t.

Defintionsmängden för $\arccos$ är självfallet $[-1, 1]$ och värdemängden förstås $[0, \pi]$.

Funktionen $T(v) = \tan v,\ -\pi/2 < v < \pi/2$, är inverterbar och inversen heter $\arctan$, eller $\tan^{-1}$.

Definitionen blir alltså:

$\arctan t = v \iff t = \tan v$ och $-\pi/2 < v < \pi/2.$

Eller på ren svenska:

$\arctan t$ är den vinkel (i intervallet $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$) vars tan-värde är t.

Defintionsmängden för $\arctan$ är självfallet $\mathbb{R}$ och värdemängden förstås $(-\pi/2, \pi/2)$.

Ni kan själva göra motsvarande definition för arccotangens.

De inversa trigonometriska funktionernas derivator:

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad -1 < x < 1$$

$$\frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$$

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}, \quad \text{för alla } x$$

Vad blir derivatan av arccotangens?

Differentialekvationer. Se särskilt dokument för teorin för ordinära linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter. Här följer en kortkort sammanfattning av hur man löser dem.

Första ordningen. En homogen linjär differentialekvation av 1:a ordningen med konstanta koefficienter kan skrivas

$$y'(t) + ky(t) = 0$$

för någon konstant k. Vi kan lösa den genom att undersöka den karaktäristiska ekvationen $r + k = 0$ som har lösning $r = -k$. Lösningen till differentialekvationen blir

$$y(t) = Ce^{-kt}, \text{ där } C \text{ är en godtycklig konstant.}$$

En inhomogen första ordningens linjär differentialekvation med konstanta koefficienter kan skrivas

$$y'(t) + ky(t) = f(t)$$

där k är en konstant och f någon funktion av t. Om y_p är någon lösning till denna ekvation och y_h är allmänna lösningen till den homogena ekvationen $y'(t) + ky(t) = 0$ så gäller att allmänna lösningen till

$$y'(t) + ky(t) = f(t)$$

har formen

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t).$$

För att hitta y_p gör man en ansättning, deriverar och sätter in i ekvationen och försöker man bestämma eventuella konstanter så att det funkar.

Andra ordningen. En homogen linjär differentialekvation av 2:a ordningen med konstanta koefficienter kan skrivas

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$$

för några konstanter a, b. Vi kan lösa den genom att undersöka den karaktäristiska ekvationen $r^2 + ar + b = 0$ som har lösning r_1 och r_2. Lösningen till differentialekvationen får delas upp i tre fall:

Fall 1. Om $r_1 \neq r_2$ och dessa är reella tal, så har differentialekvationen allmän lösning

$$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}, \text{ där } A, B \text{ är godtyckliga konstanter.}$$

Fall 2. Om $r_1 = r_2$, så har differentialekvationen allmän lösnng

$$y(t) = Ae^{r_1 t} + Bte^{r_2 t}, \text{ där } A, B \text{ är godtyckliga konstanter.}$$

Fall 3. Om $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ där α och β är reella tal, så har differentialekvationen allmän lösnng

$$y(t) = Ae^{\alpha t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t), \text{ där } A, B \text{ är godtyckliga konstanter.}$$

En inhomogen linjär differentialekvation av 2:a ordningen med konstanta koefficienter kan skrivas

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t)$$

för några konstanter a, b och någon funktion f av t. Om y_p är någon lösning till denna ekvation och y_h är allmänna lösningen till den homogena ekvationen $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$ så gäller att allmänna lösningen till

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t)$$

har formen

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t).$$

För att hitta y_p gör man en ansättning, deriverar och sätter in i ekvationen och försöker man bestämma eventuella konstanter så att det funkar.