Institutionen för Matematik

SF1625 Envariabelanalys
Läsåret 2016-2017
Lars Filipsson

Modul 4
Mål och Sammanfattning

1. Mål för modul 4

Tillämpningar av derivata.

- Förstå och använda Newton-Raphsons metod för ekvationslösning
- Använda l'Hospitals regel för att beräkna gränsvärden av typ $0/0$.
- Använda derivata för att undersöka en funktions egenskaper, till exempel
  - avgöra var funktionen är växande/avtagande
  - hitta lokala och globala extremvärden
  - skissa funktionsgrafen
  - visa olikheter
- Hitta asymptoter till funktionskurvor
- Använda andraderivatan för att undersöka konvexitet/konkavitet
- Använda Taylors formel för att approximera funktioner med polynom till given noggrannhet

2. Sammanfattning av modul 4

Newton Raphsons metod. Enligt linjär approximation är $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$ om x ligger nära a. Detta kan vi bra sedan modul 2 och modul 3. En tillämpning av detta är Newton-Raphsons metod för ekvationslösning. Om vi vill lösa ekvationen $f(x) = 0$ så gissar vi en grov approximation a till lösningen och löser sedan ekvationen $f(a) + f'(a)(x-a) = 0$ istället. Vi får lösningen

$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

som är en approximativ lösning till ekvationen $f(x) = 0$. Nu tar vi detta x-värde som utgångspunkt för en ny omgång av samma metod och upprepar metoden för att få successivt bättre och bättre approximationer av lösningen. I det n:te steget har vi alltså

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

L'Hospitals regel. Om vi vill beräkna ett gränsvärde $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ av typen $0/0$ så gäller under vissa förutsättningar på funktionerna f och g att

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Läs mer om de precisa detaljerna i den här regeln i bokens kapitel 4.3.

Förändringstakt. Tolkningen av derivata som förändringstakten av en funktion har massor av tillämpningar. En vanlig är hastighet, men det är inte den enda. En speciell typ av problem uppstår när två kvantiteter som båda beror på tiden är relaterade genom ett samband, en ekvation. Många exempel på detta finns i bokens kapitel 4.1.

Växande/avtagande. Vi lärde oss redan i kapitel 2 från medelvärdessatsen och dess följdsatser att man kan använda derivata för att undersöka om en funktion är (strängt) växande eller avtagande på ett intervall. Repetera gärna detta!

Extremvärdesproblem. Lokala och globala extremvärden (se definitioner i bokens kap 4.4) måste inte finnas. Existensen av dessa kräver alltid ett argument (en tacksam situation är när f är kontinuerlig på ett slutet och begränsat intervall – då finns alltid max och min). Om extremvärden finns så måste de antas i kritiska punkter (dvs punkter där derivatan är noll), singulära punkter (dvs punkter där derivatan saknas) eller randpunkter (oftast ändpunkter på intervallet).

Det är viktigt att förstå att kritiska punkter inte alltid är extrempunkter. Till exempel har $f(x) = x^3$ en kritisk punkt i origo men origo är ingen extrempunkt (det är en terasspunkt och varken en max- eller min-punkt). På samma sätt är extrempunkter inte alltid kritiska punkter. Till exempel har $g(x) = |x|$ en extrempunkt i origo, men detta är ingen kritisk punkt för funktionen är inte deriverbar där.

En korrekt användning av derivata när man söker efter extrempunkter innebär alltså att kritiska punkter är kandidater till extrempunkter. När man har hittat en kritisk punkt, som behövs ytterligare en undersökning för att avgöra om denna kritiska punkt är en extrempunkt. Det finns två vanliga sätt. Det ena är att man gör ett teckenschema för derivatan kring den kritiska punkten. Om derivatan har teckenväxlingen

$$+ \quad 0 \quad -$$

så måste den kritiska punkten vara en lokal maxpunkt. Om derivatan har teckenväxlingen

$$- \quad 0 \quad +$$

så måste den kritiska punkten vara en lokal minpunkt. Tänk igenom varför det måste vara så! Det andra sättet är att använda andraderivatan. Om $f'(a) = 0$ och $f''(a) < 0$ så måste a vara en lokal maxpunkt. Om $f'(a) = 0$ och $f''(a) > 0$ så måste a vara en lokal minpunkt. Tänk igenom varför det måste vara så!

Skissa funktionsgrafen. En derivataundersökning är huvudingrediensen i skissandet av en funktions graf. Med hjälp av bland annat derivatan kan man ju enligt ovan hitta de intervall där funktionen växer respektive avtar, man kan hitta lokala och globala extrempunkter osv. Ibland vill man gå ännu längre och undersöka med hjälp av andraderivatan var funktionsgrafen är konvex respektive konkav. Man behöver ibland också hitta asymptoter. Detta beskrivs utförligt med checklista och allt i bokens kapitel 4.6. Observera att undersökningen av andraderivatan inte alltid är obligatorisk för att skissa grafen – det beror på vilka noggrannhetskrav man har om man tar med den eller inte.

Viktigt är att man inser att en derivataundersökning av det slag man gör för att skissa funktionsgrafen också ger underlag för att svara på en mängd frågor om funktionen. Till exempel:

– Vad är funktionens största/minsta värde?
– Vad är funktionens värdemängd?
– Är funktionen alltid mindre än 1?
– Hur många lösningar har ekvationen $f(x) = 3$?

För denna typ av frågor krävs oftast en komplett undersökning av funktionens derivata.

Taylors formel. Detta är en metod att approximera svåra funktioner med lätta funktioner, närmare bestämt polynom, i närheten av någon punkt. Vi har ju tidigare talat om linjär approximation, dvs

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) \qquad \text{för } x \text{ nära } a$$

under vissa villkor på f. Nu går vi vidare med utgångspunkt i detta. Tanken är att vi får ännu bättre approximationer om vi approximerar med ett högre ordningens polynom, andragradare, tredjegradare osv. Frågorna är då: hur ska dessa polynom väljas och hur stort är felet i approximationen? Så här konstruerar man Taylorpolynom av olika grader till en funktion f (som är tillräckligt många gånger deriverbar) nära en punkt a:

$$\begin{aligned}
p_0(x) &= f(a) \\
p_1(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) \\
p_2(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \\
p_3(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 \\
&\text{osv}
\end{aligned}$$

Observera att $1! = 1$ så $p_1(x)$ är precis den linjära approximationen av f kring a som vi har studerat tidigare. Användningen av Taylorpolynom är approximation, dvs

$$f(x) \approx p_n(x) \qquad \text{för } x \text{ nära } a$$

Vi observerar också att Taylorpolynomen är konstruerade med data från funktionen f i punkten a, närmare bestämt funktionens värde och funktionens derivators värden i punkten a. Och konstruktionen är sådan att Taylorpolynomen härmar funktionen, så att p_1 har samma värde och samma derivata i punkten a som f, p_2 har samma värde, samma derivata och samma andraderivata i punkten a som f, osv.

Felet i approximationen då? Allmänt gäller att felet i approximationen ges av ungefär hur nästa term i utvecklingen skulle se ut. Närmare bestämt gäller:

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

för någon punkt c mellan x och a. Förutsättningen för att detta ska gälla är att f är $n+1$ gånger deriverbar på något intervall som innehåller x och a.

Taylorpolynom kring origo, dvs då punkten a är 0, brukar ofta kallas Maclaurinpolynom.

Här är ett exempel. Om man vill använda ett andra ordningens Taylorpolynom kring origo för att hitta ett närmevärde till $\cos 0.1$ så får man först derivera $f(x) = \cos x$ två gånger och se att $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ och $f''(0) = -1$. Sedan sätter man in dessa siffror i formeln för p_2 och får

$$p_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Detta använder vi för approximation, dvs

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} \qquad \text{för } x \text{ nära } 0.$$

Speciellt, för $x = 0.1$, får vi

$$\cos 0.1 \approx 1 - \frac{0.1^2}{2} = 0.995$$

som är den sökta approximationen.