Institutionen för Matematik

SF1625 Envariabelanalys
Läsåret 2016-2017
Lars Filipsson

Modul 6
Mål och Sammanfattning

1. Mål för modul 6

Integraler.

- Förstå vad som menas med en generaliserad integral
- Förstå vad som menas med att en generaliserad integral är konvergent respektive divergent
- Beräkna vissa generaliserade integraler
- Avgöra konvergens/divergens av generaliserade integraler med hjälp av jämförelser
- Beräkna geometriska tillämpningar av integraler (rotationsvolym, rotationsarea, båglängd)
- Beräkna andra tillämpningar av integraler med hjälp av tekniken med Riemann-summor
- Kunna utföra svårare och mer speciella substitutioner och andra integraltrix

2. Sammanfattning av modul 6

Generliserade integraler. I förra modulen definierade vi vad som menades med integraler och lärde oss räkna ut dem med primitiv funkiton, variabelsubstitution, partiell integration osv. Då krävdes att funktionerna var begränsade och intervallen vi integrerade över var begränsade. Nu utvidgar vi integralbegreppet till att omfatta även funktioner som är obegränsade och integraler över obegränsade intervall. Detta är generaliserade integraler. Generliserade integraler finns alltså av två typer:

A. Integraler över obegränsade intervall, t ex $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-x}\,dx$

B. Integraler av obegränsade funktioner, t ex $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$

I båda fallen undersöker man dem genom att trunkera och ta gränsvärdet. Närmare bestämt:

$$\int_1^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R e^{-x}\,dx$$

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \lim_{c\to 1^+}\int_c^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$$

Om man får ett gränsvärde (som är ett tal) så sägs den generaliserade integralen vara konvergent, annars divergent. Båda exemplen ovan är konvergenta, räkna efter själva.

Ibland kan man avgöra om en generaliserad integral är konvergent eller divergent genom att jämföra med en integral man känner till. Vi har följande sats:

Sats: Antag att $0 \le f(x) \le g(x)$ på $[a,\infty)$. Då gäller följande:

1. $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ konvergent $\Longrightarrow$ $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ är konvergent
2. $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergent $\Longrightarrow$ $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ är divergent

Tillämpningar av integraler. De flesta tillämpningar av integraler bygger på metoden med Riemannsummor, dvs att för en kontinuerlig funktion f på $[a,b]$ så konvergerar Riemannsummorna mot integralen när partitionen görs finare och finare så att längden av alla delintervall går mot 0. Några tillämpningar bör man kunna nästan utantill med formler och allt, t ex

Arean under kurvan, arean mellan två kurvor
Rotationsvolymer runt x-axeln
Rotationsvolymer runt y-axeln
Bågländ
Ev också Rotationsarea

För andra tillämpningar ska man kunna metoden med Riemannsummor så bra att man kan ta fram integralen själv med hjälp av den, t ex massa, tyngdpunkt mm. Det är alltså inte de speciella formlerna från fysik och annat som är viktiga här utan metoden.
Se mer i boken om tillämpningar av integraler, speciellt formlerna för rotationsvolymer mm.