SF1625 Envariabelanalys
Föreläsning 16

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

3 oktober

Denna vecka

Detta ska vi göra denna vecka

- Idag:
    - Generaliserade integraler
    - Översikt över kursen
- På onsdag och fredag:
    - Geometriska tillämpningar av integraler
    - Andra tillämpningar av integraler

Partialbråksuppdelning. Knepiga fall

$$\int \frac{x+11}{x^2(x-1)}\,dx = \int \left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}\right)dx = \ldots$$

$$\int \frac{2x+1}{x(x^2+1)}\,dx = \int \left(\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}\right)dx = \ldots$$

Dagens tentaproblem.

Beräkna arean av det område som ligger mellan kurvorna $y = 1$ och $y = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 4x + 3}$, för x i intervallet $0 \leq x \leq R$. Vad händer med arean om vi låter $R \to \infty$?

Generaliserade integraler

Förra veckan studerade vi integraler över begränsade intervall och av funktioner som var begränsade.

Nu ska vi studera **generaliserade integraler**. Med det menas:

A. Integraler över obegränsade intervall

B. Integraler av funktioner som är obegränsade

Metoden för att studera dem är: **ta gränsvärdet.**

Får man ett gränsvärde (som är ett tal, inte ∞) så är den generaliserade integralen **konvergent**, annars **divergent.**

Integral över obegränsat intervall.

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx$$

Observera att integralen i högerledet är vanlig hederlig integral som ska räknas ut innan man tar gränsvärdet.

Exempel:

$$\int_1^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R e^{-x}\,dx = \lim_{R\to\infty} [-e^{-x}]_1^R$$
$$= \lim_{R\to\infty} (-e^{-R} + e^{-1}) = e^{-1}$$

Det gäller att

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \text{ är konvergent (den blir ett tal)}$$

och

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx \text{ är divergent (den blir oändlig)}$$

Generaliserade integraler

Ofta kan man avgöra om en generaliserad integral är konvergent eller divergent utan att räkna ut den, till exempel genom att **jämföra** den med någon av ovanstående generaliserade integraler.

Antag att $0 \leq f(x) \leq g(x)$ på $[a, \infty)$. Då gäller följande:

1. $\int_a^\infty g(x)\,dx$ konvergent $\implies \int_a^\infty f(x)\,dx$ är konvergent
2. $\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergent $\implies \int_a^\infty g(x)\,dx$ är divergent

Ytterligare ett tentaproblem.

Avgör om den generaliserade integralen

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2 + x}\,dx$$

är konvergent eller divergent. Om den är konvergent, beräkna den!

Obegränsad funktion

Om $f(x)$ är obegränsad när $x \to a$ så sägs integralen $\int_a^b f(x)\,dx$ också vara generaliserad (fast det inte syns på gränserna). Motsv för b.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

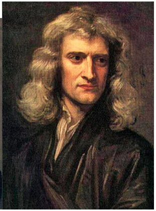
Exempel

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$$

Envariabelanalys — bakgrund och motivation

$v = \dfrac{s}{t}$?

$A = \pi r^2$?



Tillämpningsexempel

En uppgift som liknar en gammal tentauppgift:

En silo i form av en cylinder med radie 2 meter och höjd 9 meter är packad med ett material vars densitet på höjden x meter över bottenplattan ges av

$$d(x) = \frac{1}{20\sqrt{x+1}} \quad \text{kg/m}^3$$

Beräkna massan av innehållet i silon.

Google maps:

A. Om man kör med en hastighet v km/h som varierar med tiden t timmar, hur långt kommer man mellan tiden $t = 0$ och tiden $t = 1$?

B. Om man kör med en hastighet v km/h som varierar med körsträckan s km, hur lång tid tar det att köra från den punkt då $s = 0$ till den punkt då $s = 100$?

Tillämpningsexempel

En gammal tentauppgift:

Laddningen $q(t)$ i kondensatorn i en viss växelströmskrets uppfyller differentialekvationen

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\frac{dq}{dt} + 2q = 5\cos t$$

med initialvillkoren $q(0) = 1$ och $q'(0) = 3$.

A. Bestäm laddningen i kondensatorn vid tiden t.
B. Beskriv vad som händer med laddningen i kondensatorn efter lång tid.