F11

1) Riemann ex f kont $[a,b]$ $\Rightarrow$ f integrerbar

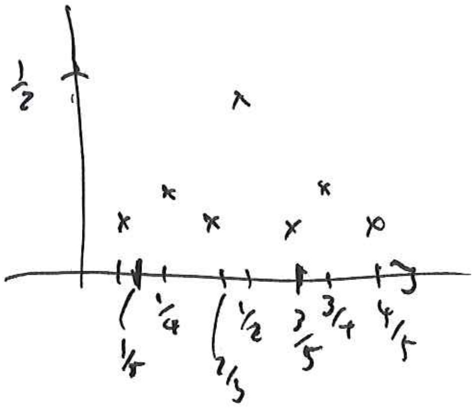
2) f styckvis kont & begränsad $\Rightarrow$ f integrerbar

3) $f = \begin{cases} 1 & [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ $\Rightarrow$ inte integrerbar

4) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \quad x = \frac{p}{q} \\ 0 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ $\Rightarrow$ f integrerbar

Bevis: Givet $\varepsilon > 0$ vi måste hitta en indelning

Observera att det finns färre än



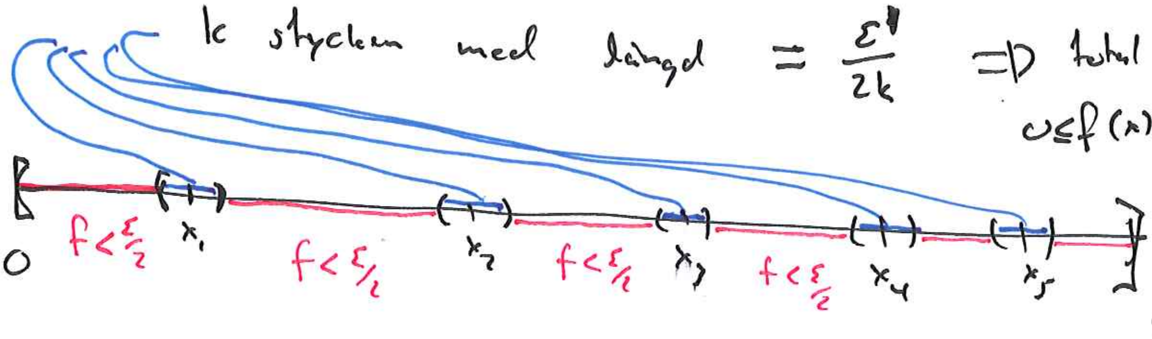
$\frac{2}{\varepsilon}$ punkter x där $f(x) \geq \frac{\varepsilon}{2}$,

säg $x_1, x_2, \dots, x_k$. $\# \; k \leq \frac{2}{\varepsilon}$

Gör indelningen $0 < x_1 - \frac{\varepsilon}{4k} < x_1 + \frac{\varepsilon}{4k} < x_2 - \frac{\varepsilon}{4k} < \dots \quad < 1$

k stycken med längd $= \frac{\varepsilon}{2k}$ $\Rightarrow$ total längd $\frac{\varepsilon}{2}$

$0 \leq f(x) \leq 1$



Så

$0 \leq L(P,f)$ $U(P,f) \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot$ längd röd $+ 1 \cdot$ längd blå $< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

$f \geq 0$

Så $U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$ $\blacksquare$

Frågan kvarstår Vilka funktioner är integrerbara?

Svar 1: Mängden diskontinuiteter måste vara liten?
och f begränsad.

Definition: Vi säger att $A \subset \mathbb{R}$ är en noll-mängd om det för varje $\varepsilon > 0$ existerar ett öppen mängd $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j)$ $\left(\text{eller } U = \bigcup_{j=1}^{N} (a_j, b_j) \right)$

så att
i) $A \subset U$ (U är "större" än A)
ii) $\sum_j b_j - a_j < \varepsilon$. ($U$ har mindre längd ~~är mindre~~ än ε).

Ex: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x \in \mathbb{Q} \cap (0,1) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

då är $f(x)$ diskontinuerlig endast i $(0,1) \cap \mathbb{Q}$

(eftersom om $\frac{p_j}{q_j} \to r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ då går $q_j \to \infty$
vilket ger $f\left(\frac{p_j}{q_j}\right) = \frac{1}{q_j} \to 0 = f(r)$)

Eftersom $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ är uppräknelig så kan vi lista diskontinuitetspunkterna $D = \{q_1, q_2, \dots, q_j, \dots\}$

& Observera att

$$D \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(q_j - \frac{\varepsilon}{2 \cdot 2^j}, q_j + \frac{\varepsilon}{2 \cdot 2^j} \right) \quad \text{och}$$

$$\sum \left(q_j + \frac{\varepsilon}{2 \cdot 2^j} - \left(q_j - \frac{\varepsilon}{2 \cdot 2^j} \right) \right) = \varepsilon \sum \frac{1}{2^j} = \varepsilon.$$ Så disk. är en noll mängd.

Def: Vi säger att oscillationen av f i en ^öppen^ mängd Ω

är $\operatorname{osc}_{\Omega}(f) = \sup_{\Omega} f - \inf_{\Omega} f$. Och oscillation i en punkt x_0

definierar vi som $\underbrace{\operatorname{osc}_{x_0} f = \lim_{r \to 0} \operatorname{osc}_{(x_0-r,\, x_0+r)} f(x)}_{\text{Varför väldefinierat?}}$.

~~Sats~~ Kommentarer.

1) Om f är kontinuerlig i x_0 så

$\operatorname{osc}_{x_0} f = 0$ Varför ($r < \delta$ ~~$\Rightarrow$~~

$\operatorname{osc}_{(x_0-r,\, x_0+r)} f < 2\varepsilon$)

2) Om D_k, $k = 1, 2, \ldots$, är en uppräknelig mängd

av noll mängder då är $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$ en noll mängd.

Täck D_k med (a_j^k, b_j^k) så $\sum_{k=1}^{\infty} (b_j^k - a_j^k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$

då kommer (a_j^k, b_j^k) att vara en uppräknelig

mängd intervall så att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j - a_j \right) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} \leq \varepsilon.$$

Sats: Om f är en begränsad funktion på $[a,b]$. Då är f integrerbar omm

$$D = \{x \in [a,b] \,;\, \operatorname{osc}_x f > 0\}$$ är en noll-mängd.

Bevis: Vi börjar med att visa att f integrerbar $\Rightarrow$ D är en nollmängd.

Vi definierar

$$D_k = \left\{x \in [a,b] \,;\, \operatorname{osc}_x f \geq \frac{1}{k}\right\}.$$

Då kommer $D = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$ så det räcker att visa att D_k är en nollmängd för varje k.

Eftersom f är integrerbar så finns det en indelning P : $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ så att

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_{j-1})M_j}_{U(P)} - \underbrace{\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_{j-1})m_j}_{L(P)} = \sum_{j=1}^{n}\overbrace{(x_j - x_{j-1})}^{\geq 0}\underbrace{\overbrace{(M_j - m_j)}^{\geq 0}}_{= \sup_{(x_{j-1},x_j)} f - \inf_{(x_{j-1},x_j)} f = \operatorname{osc}_{(x_{j-1},x_j)} f} < \frac{\varepsilon}{k}$$

~~Observera att~~ ~~B~~. Om vi bara tittar på de intervall $(x_{j-1}, x_j) \cap D_k \neq 0$ så får vi en mindre summa.

$$\sum_{\substack{j \\ (x_{j-1},x_j)\cap D_k \neq \emptyset}} (x_j - x_{j-1}) \underbrace{\operatorname{osc}_{(x_{j-1},x_j)} f}_{\geq \frac{1}{k}} \leq \cancel{\sum_j (x_j - x_{j-1}) \operatorname{osc} f} \leq \cancel{\frac{1}{k}} \sum_{\substack{j \\ (x_{j-1},x_j)\cap D_k \neq \emptyset}} (x_j - x_{j-1}) < \frac{\varepsilon}{\cancel{k}}$$

så för varje $\varepsilon > 0$ så existerar intervall (a_j, b_j) ~~sådana~~, nämligen (x_{j-1}, x_j), så $(x_{j-1}, x_j) \cap D_k \neq \emptyset$,

så att

$$D_k \subset \bigcup_j (a_j, b_j) \quad \text{och} \quad \sum_{j=1}^{N} (b_j - a_j) < \varepsilon .$$

$\Longrightarrow$ D_k är en nollmängd

$\blacksquare$

Låt oss titta på den andra implikationen

D nollmängd $\Longrightarrow$ f integrerbar.

Vi behöver hitta en indelning $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

så att

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \operatorname{osc}_{(x_{j-1},x_j)} f < \varepsilon .$$

För att göra detta måste vi använda att D är en noll-mängd, mer specifikt kommer vi att använda att D_k är en noll-mängd.

Eftersom D_k är en nollmängd så $\exists\ (a_i, b_i)$ så att $D_k \subset \bigcup (a_i, b_i)$ och $\sum_i (b_i - a_i) < \varepsilon_1$.

Problemet är att ~~om~~ (b_i, a_i) kan vara oändligt många.

<u>Antag att D_k är kompakt</u> (Visar det senare)

Då finns det en ändlig deltäckning (a_i, b_i), $j = 1 \ldots N$ så att $D_k \subset \underbrace{\bigcup_{j=1}^{N} (a_j, b_j)}_{= U}$ och $\sum_{j=1}^{N} (b_j - a_j) < \varepsilon_1$.

För alla $x \in [a,b] \setminus U = K$ så finns det ett r_x så $\underset{(x - r_x, x + r_x)}{\operatorname{osc}} f(x) < \frac{1}{k}$

K sluten och begränsad i $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ K kompakt

$\Rightarrow$ ändlig delövertäckning $(x_1 - r_1, x_1 + r_1), (x_2 - r_2, x_2 + r_2) \ldots (x_n + r_n)$

Om vi slänger in alla tal (ändligt många)

$a_1, a_2, \ldots, a_N$ och $x_1 - r_1, x_1 + r_1, x_2 - r_2, x_2 + r_2, \ldots x_n - r_n, x_n + r_n$

a och b i vår indelning P, $(y_0 < y_1 < y_2 \ldots)$ så får vi

$$U(P) - L(P) = \sum_{j=1}^{m} (y_j - y_{j-1}) \underbrace{(M_j - m_j)}_{= \underset{(y_{j-1}, y_j)}{\operatorname{osc}} f} \le \sum_{\substack{j \\ (y_{j-1}, y_j) \cap D_k \neq \emptyset}} \overbrace{(y_j - y_{j-1})}^{< \varepsilon_1} \overbrace{\underset{(\ )}{\operatorname{osc}} f}^{< 2M}$$

$$+ \sum_{\substack{j \\ (y_{j-1}, y_j) \cap D_k = \emptyset}} \overbrace{(y_j - y_{j-1})}^{< b-a} \overbrace{\operatorname{osc} f}^{< \frac{1}{k}} < 2M\varepsilon_1 + \frac{b-a}{k}, \quad \text{där } M = \sup_{(a,b)} |f|$$

Välj nu k så stort att $\frac{b-a}{k} < \frac{\varepsilon}{2}$ och

ε_1 så litet att $2M\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{2}$.

Då får vi

$U(p) - L(p) < \varepsilon$, förutsatt att D_k är kompakt.

Bevis att D_k är kompakt.

Enl Heine-Borels sats så räcker det att visa att $D_k = \{x \in [a,b] \,;\, \lim_{r\to 0} \operatorname{osc}_{(x-r,x+r)} f \geq k\}$ är sluten och begränsad.

<u>Steg 1</u>: D_k är begränsad eftersom $D_k \subset [a,b]$.

<u>Steg 2</u>: D_k är sluten.

För att visa detta så räcker det att visa att om $x_j \in D_k$ och $x_j \to x_0$ då kommer $x_0 \in D_k$.

För varje $r > 0$ så $\exists x_j$ så $|x_0 - x_j| < \frac{r}{2}$ och därför

$(x_j - \frac{r}{2}, x_j + \frac{r}{2}) \subset (x_0 - r, x_0 + r) \Rightarrow$

$\operatorname{osc}_{(x_0-r,x_0+r)} f \geq \operatorname{osc}_{(x_j-\frac{r}{2},x_j+\frac{r}{2})} f \geq \frac{1}{k}$ eftersom $x_j \in D_k$

Enligt satsen om olikhet i övergång av gränsvärde så

$$\lim_{r\to 0} \operatorname{osc}_{(x_0-r,\,x_0+r)} f = \operatorname{osc}_{x_0} f \geq \frac{1}{k} \implies x_0 \in D_k .$$

$\blacksquare$

Följdsatser.
1) f kont på $[a,b]$ $\implies$ f integrerbar
2) styckvis – " – $\implies$ – " –
3) f & g integrerbara $\implies$ $f+g$, $f\cdot g$ etc integrerbara
4) f integrerbar $\implies$ $|f|$ integrerbar
5) etc ...