KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Koncepttentamen

Skrivtid: 3 timmar
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Tilman Bauer

Tentamen består av sex uppgifter som vardera ger maximalt sex poäng.

Del A på tentamen utgörs av de två första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De två följande uppgifterna utgör del B och de två sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst tre poäng.

Del A

1. De tre planen med ekvationerna $x-2y+z=4$, $x+y+z=2$ och $x+z=6$ skär varandra parvis i tre olika linjer i rummet.
   (a) Bestäm parameterformen för minst två av dessa linjer. **(3 p)**
   (b) Avgör om de tre linjerna skär varandra i en punkt. **(3 p)**

2. Betrakta följande matris:
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$
   (a) Bestäm en 2×2-matris S så att $S^{-1}AS$ är en diagonalmatris. **(3 p)**
   (b) Bestäm A^{999}. **(3 p)**

DEL B

3. Matrisen till den linjära avbildningen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ med avseende på basen $\mathfrak{B} = \left(\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0\\2\end{smallmatrix}\right]\right)$ är
$$\begin{bmatrix} -1 & 11 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}.$$
   (a) Beräkna standardmatrisen till f. **(4 p)**
   (b) Beräkna matrisen till f med avseende på basen $\mathfrak{B}' = \left(\left[\begin{smallmatrix}0\\2\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]\right)$. OBS: Jämför baserna noggrant så att du kan slippa beräkningar. **(2 p)**

4. Vid en mätning av två storheter har vi fått följande mätvärden

I (mA)	0	2	4	6
U (mV)	1	7	8	10

   Två forskare tvistar om det finns ett linjärt samband $U = RI$, eller om det krävs en konstantterm för att förklara sambandet, $U = RI + U_0$.
   (a) Ställ upp de två minsta-kvadratproblem som fås från de givna mätdata för att bestämma de okända parametrarna i de två modellerna. **(3 p)**
   (b) Lös minsta-kvadratproblemen och formulera adekvata slutsatser. **(2 p)**
   (c) Förklara varför minsta-kvadratavvikelsen säkerligen är mindre i det andra fallet. **(1 p)**

DEL C

5. Låt A vara en $(n \times n)$-matris och $Q(x) = x^T(A^TA)x$ den kvadratiska formen definierad av den symmetriska matrisen A^TA.
   (a) Visa att Q är positivt semidefinit oavsett valet av A. **(3 p)**
   (b) Visa eller vederlägg: Om A är inverterbar så är Q positivt definit. **(3 p)**

6. Visa att det för 2×2-matriser A gäller att om $A^k = 0$, för något heltal $k > 2$, så är också $A^2 = 0$. **(6 p)**