

# SF1625 Envariabelanalys

## Föreläsning 17

Lars Filipsson

Institutionen för matematik  
KTH

5 oktober

## Integraler som Riemannsummor:

Om  $f$  är kontinuerlig på  $[a, b]$  så vet vi att

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum f(x_j) \Delta x_j$$

där högerledet är en Riemannsumma. Detta är ofta grunden när integraler tillämpas.

## **Geometriska tillämpningar:**

Area, volym, båglängd, ...

## **Andra tillämpningar:**

Massa, tyngdpunkt, tröghetsmoment, arbete, ...

## Rotationsvolym.

A. Rotationsvolymen  $V$  som genereras när ytan mellan kurvan  $y = f(x)$ , då  $a \leq x \leq b$ , och  $x$ -axeln roteras ett varv runt  $x$ -axeln ges av

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx$$

B. Rotationsvolymen  $V$  som genereras när ytan mellan kurvan  $y = f(x)$ , då  $a \leq x \leq b$ , och  $x$ -axeln roteras ett varv runt  $y$ -axeln ges av

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

Bevis på tavlan och i boken.

## Dagens tentaproblem.

Härled följande formler med hjälp av rotationsvolymsteknik.

A. Volymen  $V$  av ett klot med radie  $r$  ges av

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

B. Volymen  $V$  av en kon med basradie  $r$  och höjd  $h$  ges av

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

## Rotationsvolym, ett exempel till.

Själva kupan av ett vinglas har formen som erhålls när kurvan

$$y = 4x^3, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2},$$

roteras runt  $y$ -axeln (enheten på axlarna är dm). Hur mycket rymmer glaset?

## Kurvlängd.

Längden av kurvan  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , ges av

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Bevis på tavlan och i boken.

## Kurvlängd.

Beräkna längden av kurvan  $y = \ln(1 - x^2)$ ,  $0 \leq x \leq 0.5$ .



## Rotationsarea.

Arean  $A$  som genereras när kurvan  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , roteras runt  $x$ -axeln ges av

$$A = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Bevis på tavlan och i boken.

## Massa.

En cylindrisk silo med radie 2 meter och höjd 6 meter är fullpackad. Densiteten  $\rho$  av innehållet varierar med höjden  $h$  enligt formeln

$$\rho(h) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h}{2}}} \text{ ton/m}^3.$$

Beräkna massan av innehållet i silon.

## Arbete.

För en viss fjäder gäller att kraften som krävs för att trycka ihop fjädern  $x$  meter är  $F(x) = x/2$  N. Hur stort arbete krävs för att trycka ihop denna fjäder  $1/10$  meter?

## Hastighet mm.

1. En bil startar och kör längs en väg med en hastighet som vid tiden  $t$  timmar ges av  $v(t)$  km/h. Hur långt har bilen kört efter 2 timmar?
2. En bil startar och kör längs en 20 km lång väg med en hastighet som vid  $x$  körda km ges av  $v(x)$  km/h (pga hastighetsbegränsningar mm beror alltså hastigheten på körsträckan). Hur lång tid tar det att köra 20 km?