

SF1625 Envariabelanalys

Föreläsning 15

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

30 september 2016

Påminnelse:

- Klara de sista seminarierna
- Varför gick det så bra förra året
- Räkna uppgifter själv
- Med mera
- Kursnämnd

Uppgift:

En silo i form av en cylinder med radie 2 meter och höjd 9 meter är packad med ett material vars densitet på höjden x meter över bottenplattan ges av

$$d(x) = \frac{1}{20\sqrt{x+1}} \text{ kg/m}^3$$

Beräkna massan av innehållet i silon.

Idag:

- Variabelsubstitution i integraler
- Partiell integration
- Partialbråksuppdelning

Problemet vi löser är detta: om man inte direkt ser en primitiv funktion – vad kan man göra då?

De flesta uppgifter vi räknar idag är gamla tentauppgifter!

Variabelsubstitution (med gränser)

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

Villkor: g är deriverbar på $[a, b]$ och f är kontinuerlig på g 's värdemängd (när x varierar i $[a, b]$)

Bevis: Av villkoren följer att f har en primitiv F . Kedjeregeln för derivator ger

$$VL = HL = F(g(b)) - F(g(a))$$

Variabelsubstitution (utan gränser)

$$\int f(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) + C$$

Beräkna integralerna med variabelsubstitution:

$$\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{1 + e^x} dx$$

$$\int_0^2 \frac{x}{(x^2 + 4)^{1/3}} dx$$

$$\int \tan x dx$$

$$\int \frac{1}{2 + 8x^2} dx$$

Partiell integration (med gränser)

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x) dx.$$

Villkor: F och g har kontinuerliga derivator på $[a, b]$ och $F' = f$

Bevis: Produktregeln för derivator ger att

$$\frac{d}{dx} F(x)g(x) = F'(x)g(x) + F(x)g'(x).$$

Integration från a till b av båda sidor ger formeln.

Partiell integration (utan gränser)

$$\int f(x)g(x) dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) dx.$$

Exempel på partiell integration

Beräkna integralerna med partiell integration:

$$\int \ln x \, dx$$

$$\int_1^2 x^5 \ln x \, dx$$

$$\int_1^4 \sqrt{x} \ln x \, dx$$

$$\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx$$

$$\int_0^1 \arcsin x \, dx$$

Integrerbarhet och primitiv funktion.

1. Är funktionen $f(x) = e^{x^2}$ integrerbar på $[1, 2]$?
2. Kan du ange en primitiv funktion?

Partialbråksuppdelning. Görs vid rationella integrander:

$$\int \frac{3x + 2}{x^2 - 4x + 12} dx = \int \left(\frac{1}{x - 2} + \frac{2}{x + 6} \right) dx = \dots$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2 - 9} dx = \int_1^2 \left(\frac{1/6}{x - 3} - \frac{1/6}{x + 3} \right) dx = \dots$$

(Att tänka på: 1. Nämnaren ska ha högre grad än täljaren, annars gör man polynomdivision först. 2. Särskild ansättning krävs vid dubbelrot och komplexa rötter i nämnaren)

Beräkna integralerna med partialbråksuppdelning:

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2 - 3x + 4} dx$$

$$\int_1^R \frac{1}{x^2 + x} dx$$