

### Workshop om derivata och integral

- (1) a) Vad kan man säga om funktionen  $f(x)$  och dess graf  $y = f(x)$  om derivatan  $f'(x) > 0$ , respektive om  $f'(x) < 0$ , för alla  $x$  i ett visst intervall?  
b) Vad kan man säga ifall andraderivatan  $f''(x)$  (dvs derivatans derivata) är positiv i ett intervall? Om den är negativ? Hur ser grafen ut i den punkt där andraderivatan byter tecken? En sådan punkt kallas en *inflektionspunkt* till  $f$ .  
c) Exemplifiera med några funktioner t ex  $f(x) = x^2$  och  $g(x) = x^3$ .

- (2) I denna uppgift ska du undersöka hur en funktion  $f$ 's derivata i en viss punkt  $x_0$  kan användas till att approximera funktionsvärdena till  $f$  nära punkten  $x_0$ , så kallad *linjär approximation*. Tanken är att grafen  $y = f(x)$  i närheten av en given punkt  $(x_0, f(x_0))$ , kan approximeras med tangentlinjen till grafen i denna punkt. Vi tar funktionen  $f(x) = x^2$  som exempel, och väljer att approximera denna kring punkten  $x_0 = 1$ .

- a) Bestäm tangentlinjen till funktionen  $f(x) = x^2$  i punkten  $(1, 1)$ . För att förstå linjär approximation är det bäst att skriva tangentlinjen på formen

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad (\text{där } x_0 = 1 \text{ i detta fall}).$$

Tänk efter så att du förstår att den ekvation du får verkligen är ekvationen för en rät linje.

- b) Rita i samma figur tangentlinjen  $y = L(x)$ , där  $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  och  $x_0 = 1$ , och funktionsgrafan  $y = f(x)$  i ett intervall kring punkten  $x = 1$ , t ex över intervallet  $0 \leq x \leq 2$ .

- c) Övertyga dig själv, genom att studera figuren, om att den linjära funktionen  $L(x)$  approximerar  $f(x)$  väl när  $x$  är väldigt nära  $x_0$ , det vill säga nära  $|x - x_0|$  är litet.

- d) Approximationen kan skrivas

$$f(x) \approx L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$

giltig när  $|\Delta x| = |x - x_0|$  är litet.

Härled denna approximationsformel från derivatans definition.

- d) Beräkna med hjälp av den linjära approximationen approximativa värden på  $(0.98)^2$  och  $(1.01)^2$ .

KOMMENTAR: Formeln för linjär approximation kan också skrivas på den mer kortfattade formen

$$\Delta f \approx \frac{df}{dx} \Delta x,$$

där  $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ ,  $\frac{df}{dx} = f'(x_0)$  och  $\Delta x = (x - x_0)$ .

(3) Bestäm ett approximativt värde till  $\sqrt[3]{7.9}$  genom linjär approximation av funktionen  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  kring lämplig punkt .

(4) Summan  $\sum_{k=1}^{100} k^4$  kan tolkas som en summa av areor hos 100 rektanglar med basen 1 och höjder  $1^4, 2^4, \dots, 100^4$  .

Visa med lämplig figur att

$$\int_0^{100} x^4 dx < \sum_{k=1}^{100} k^4 < \int_0^{100} (x+1)^4 dx$$

och visa sedan genom att beräkna integralerna och göra lämplig uppskattningar att att summans värde uppfyller

$$2 \cdot 10^9 < \sum_{k=1}^{100} k^4 < 3 \cdot 10^9.$$

(5) Motivera varför

$$\sum_{k=1}^{45} \sin\left(\frac{\pi}{30}k\right) \approx \int_0^{45} \sin\left(\frac{\pi}{30}x\right) dx$$

och beräkna ett approximativt värde på summan genom att beräkna integralen.

Sensmoral: Knepiga summor kan ibland approximeras med enkla integraler.

**Extrauppgift 1.** Under vissa förhållanden gäller att ljudets utbredningshastighet  $v$  [m/s] i luft beror på temperaturen  $T$  [K] enligt formeln

$$v = v_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}}$$

där  $v_0$  är utbredningshastigheten vid en referenstemperatur  $T_0$ .

Man vill beräkna utbredningshastigheten  $v$  med hjälp av denna formel och mäter upp lufttemperaturen  $300^\circ \text{K}$  . Uppskatta det relativa felet i utbredningshastighet som uppstår om temperaturmätningen har ett absolut mätfel om  $3^\circ \text{K}$ .

**Kommentar.** Om den uppmätta temeperaturen är  $T_u$  och den sanna temperaturen är  $T_s$  ges det relativa felet i  $v$  av

$$\frac{|v(T_s) - v(T_u)|}{|v(T_u)|}.$$

Täljaren  $|v(T_s) - v(T_u)|$  kallas det absoluta felet i  $v$ .

**Extrauppgift 2.:** En cylinder är 10 dm hög och har ett cirkulärt tvärsnitt med radien 2 dm. Densiteten  $\rho$  hos cylindern varierar med höjden enligt formeln  $\rho(h) = 240 - 2h^2$  [g/dm<sup>3</sup>]. Härled en integralformel för cylinderns massa och beräkna massan.

SVAR TILL VISSA UPPGIFTER:

(2) Tangentlinjen ges av  $y = 1 + 2(x - 1) \iff y = 2x - 1$ . Linjär approximation kring  $x_0 = 1$  ger  $0.98^2 \approx 0.96$  och  $1.01^2 = 1.02$ .

(3)  $\sqrt[3]{7.9} \approx \frac{239}{120} \approx 1.992$  (Extra uppgift 1) 1/200