KTH Matematik

Seminarium 4 i kursen SF1661 Perspektiv på matematik HT2015

1. Låt $p(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.
a) Faktorisera $p(x)$ så långt som möjligt i polynom med reella faktorer.
b) Faktorisera $p(x)$ så långt som möjligt i polynom med komplexa faktorer.

2 a) Ekvationen $z^6 = 1$ har precis sex lösningar i det komplexa talplanet. Bestäm dessa! Tips: Skriv både z och 1 på polär form och utnyttja de Moivres formel.

b) Visa i en figur hur lösningarna till ekvationen $z^6 = 1$ ligger i det komplexa talplanet.

c) Visa att det finns en lösning ω till ekvationen $z^6 = 1$ som är sådana att mängden av alla lösningarna ges av $z_0 = \omega^0$, $z_1 = \omega^1$, $z_2 = \omega^2$, $z_3 = \omega^3$, $z_4 = \omega^4$ och $z_5 = \omega^5$.

d) Försök formulera motsvarande påstående för det generella fallet med lösningar till ekvationen $z^n = 1$, där n är ett positivt heltal. (En lösning till $z^n = 1$ kallas en *enhetsrot* av ordning n.)

3. Du känner till de trigonometriska formlerna för dubbla vinkeln. Härled nu formler för $\cos 3v$ och $\sin 3v$ genom att genomföra följande steg:
(i) Skriv om $(\cos v + i \sin v)^3$ med hjälp av de Moivres formel.
(ii) Utveckla $(\cos\ + i \sin v)^3$ med hjälp av Binomialsatsen.
(iii) Du har nu två olika alternativa uttryck för $(\cos v + i \sin v)^3$, dessa måste naturligtvis var lika, och eftersom det är en likhet för komplexa tal innebär det att såväl realdel som imaginärdel måste vara lika.
(iv) De identiter du erhåller kan formas om med hjälp av andra trigonometriska identiteter, välj en form du tycker är enkel och estetiskt tilltalande.

Kommer du på någon annan metod att härleda dessa formler?
Hur skulle du gå till väga för att konstruera formler för t ex $\cos 4v$ eller $\sin 5v$?

4. Det gäller att funktioner $f(x) = \ln x$, $x > 0$, har derivata $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.
a) Bestäm tangentlinjen till grafen $y = \ln x$ i den punkt där $x = 1$.

b) Bestäm också närmevärden till $\ln 1.1$ och $\ln 0.98$ med hjälp av så kallad *linjär approximation*, dvs beräkna approximationerna $\ln 1.1 \approx L(1.1)$ och $\ln 0.98 \approx L(0.98)$, när $y = L(x)$ är tangentlinjen till $y = \ln x$ i den punkt där $x = 1$.

V G Vänd!

Extra uppgift att fundera på. Om du inte ser hur du ska genomföra bevisen — försök förstå vad påståendena säger och hitta på exemel som illusterar dem. Kanske kan du bevisa dem i något specialfall (t ex för polynom av grad 2 eller 3) ?

5. Låt $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ vara ett polynom där koefficienterna a_i är reella tal, $i = 0, 1 \ldots n$. Bevisa följande påstående:

Om det komplexa talet $w = a + ib$ är ett nollstället till polynomet $p(x)$, så är också det komplexa konjugatet $\bar{w} = a - ib$ ett nollstålle till p.

Tips: Använd de räkneregler för komplexkonjugatet som bevisas i övning 6.1: 4 c) och d) i **MA**.

Bevisa också följande påstående:

Ett polynom $p(x)$ med reella koefficienter kan alltid faktoriseras fullständigt i polynom av grad ett och två med reella koefficienter.

Tips: Använd Algebrans fundamentalsats (se **WIM** sid 101). Visa att för komplexkonjugerade par av rötter w och $\bar{w}$ bildar $(x - w)(x - \bar{w})$ en andragradsfaktor med reella koefficienter till $p(x)$.

V G Vänd!

Ovanstående uppgifter ska lösas inför seminarietillfället. Till seminariet ska du ha med dig lösningar på dessa uppgifter, skrivna på ett papper per uppgift, med namn och personnummer på. Lösningarna ska vara väl motiverade och tydligt skrivna. Även en person som inte är insatt i problemet i förväg ska lätt kunna läsa och förstå dina lösningar. Rita figur, förklara alla beteckningar du inför och förklara hur du resonerar!
Vid seminariet kommer era lösningar att behandlas och diskuteras. Exempel på vad som kan hända: några uppgifter samlas in och rättas av lärare, några uppgifter kamraträttas, dvs rättas av andra studenter, några uppgifter blir lösta på tavlan av studenter (t ex av dig!). Precis vad som ska hända och vad du ska göra får du veta när du kommer dit.

Godkänd vid ett seminarietillfälle blir du om du deltar aktivt vid hela seminarietillfället och utför de uppgifter du blir tilldelad, samt att de uppgifter som väljs ut för inlämning är väl behandlade och väl presenterade. Uppgifter för inlämning skall lämnas vid seminarietillfällets början.
Godkänd på hela seminarieserien blir du om du är godkänd på minst 3 av de 4 seminarietillfällena. Klarar du det får du automatiskt 3 poäng på uppgift 3 vid det ordinarie skriftliga tentamenstillfället och vid ordinarie omtentamenstillfället (och endast vid dessa tillfällen). Väl godkänd blir du om du är godkänd på alla 4 seminarietillfällen och du får då på motsvarande sätt automatiskt 4 poäng på uppgift 3. Om du har 3 poäng på uppgiften genom seminarierna och vill höja till 4 poäng behöver du göra hela uppgiften vid tentamen.

Det är tillåtet att samarbeta med andra när du löser uppgifterna, men det är inte tillåtet att skriva av en lösning eller lämna in en lösning som du inte arbetat med själv. Var och en ska skriva sina egna lösningar. Och observera detta: det räcker inte att du har med dig lösningar, du ska i detalj kunna förklara varje steg i lösningarna. Om du inte muntligt och skriftligt kan förklara din egen lösning ordentligt blir du inte godkänd.

Din föreläsare informerar om i vilken grupp du skall redovisa dina seminarieuppgifter. Endast seminarieuppgifter redovisade i föreskriven grupp ger underlag för bonuspoäng.