SF1625 Envariabelanalys

Föreläsning 19

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

10 oktober 2016

Idag

Talföljder och **Serier**, kap 9.1-9.3 i boken

- Konvergens eller divergens?
- Om konvergent, kan det beräknas?
- Jämförelser

Bakgrund

En **talföljd** är en följd av tal, t ex

$$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$$

En **serie** är en ”oändlig summa” av tal, t ex

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, \ldots$$

(Zenon igen....)

Talföljder

Definition. En talföljd $\{a_n\}$ är **konvergent** med gränsvärde L om det för varje reellt tal $\epsilon > 0$ finns ett heltal N sådant att $|a_n - L| < \epsilon$ för alla $n \geq N$. Vi skriver

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{eller} \quad a_n \to L.$$

Exempel:

$$\left\{\frac{1}{2^n}\right\} \text{ är konvergent, men } \{(-1)^n\} \text{ är inte konvergent.}$$

Uppgift: Är talföljderna $\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$ och $\left\{\dfrac{n^2+1}{n}\right\}$ konvergenta?

Viktigt faktum: Om en talföljd är monoton (växande eller avtagande) och begränsad, så måste den vara konvergent.

Serier:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

Exempel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n = 2 + 4 + 6 + 8 + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Serier

För en serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ definierar man den N:te partialsumman

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Man säger att serien är **konvergent** om talföljden $\{s_N\}$ är konvergent. Om $s_n \to s$ så säger man att seriens summa är s.

För serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ är den N:te partialsumman

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \frac{1}{2^N} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^N}}{1 - \frac{1}{2}}.$$

Eftersom $s_N \to 1$ så är serien konvergent med summa 1

Geometrisk serie

Summan av en geometrisk serie: Om $|a| < 1$ så gäller att

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}.$$

Uppgift: Avgör om serien är konvergent och beräkna dess summa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}.$$

Det finns flera olika **kriterier** för konvergens av serier. De viktigaste är:

Kriterium 0.

Om **seriens termer** inte går mot 0 så är serien divergent.

Uppgift: Avgör om dessa serier är konvergenta eller divergenta:

A. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \cos \frac{\pi}{n}$

B. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$

Kriterium 1. Jämförelse med andra serier:

Antag att $0 \leq a_n \leq b_n$. Då gäller:

A. Om $\sum b_n$ är konvergent, så är $\sum a_n$ konvergent.

B. Om $\sum a_n$ är divergent, så är $\sum b_n$ divergent.

Uppgift: Avgör om dessa serier är konvergenta eller divergenta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{2^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n} + 1}{n}$$

Kriterium 2. Integralkriteriet:

Om f är positiv, kontinulerig och avtagande på intervallet $x \geq 1$ så har

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \quad \text{och} \quad \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

samma konvergensegenskaper, dvs antingen är båda konvergenta eller så är båda divergenta.

Uppgift: Avgör om serien är konvergent eller divergent:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

Fråga 2

Avgör om $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ är konvergent eller divergent.

Dagens tentaproblem 1:

Avgör om det är sant att

$$\frac{1}{2} < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m}(m+1)} < \frac{\pi + 1}{2}$$

Dagens tentaproblem 2:

Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \arctan \frac{k}{n}$$

Fråga från förra gången

Uppgift 5 från tentan 2015-04-07