**KTH Matematik** $A$

# Lappskrivning 3, version A, i SF1633 Differentialekvationer I.

**måndag 10 oktober 2016, klockan 13:15 - 15:00**

---

LÖSNINGSFÖRSLAG

---

**1)** a) Observera att $f(x)-\frac{1}{2}$, $-\pi < x < \pi$, är en udda funktion varför dess Fourierserie blir en sinusserie,

$$f(x) - \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

där

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{3}{2}\sin nx\,dx \\ &= \frac{3}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi} = \frac{3(1-(-1)^n)}{n\pi}. \end{aligned}$$

Konvergenssatsen för Fourierserier ger nu att

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(1-(-1)^n}{n\pi}\sin nx, \tag{1}$$

om $-\pi < x < \pi$, $x \neq 0$. Alltså blir svaret

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(1-(-1)^n}{n\pi}\sin nx,}$$

b) Högra ledet i (1) är periodisk med perioden $2\pi$. Om vi utvidgar $f$ periodiskt med perioden $2\pi$ så gäller (1) för alla $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. I $x = k\pi$ får vi språngdiskontinuiteter. Alltså är seriens summa i $\frac{3\pi}{2}$,

$$\boxed{f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1.}$$

---

**2)** Låt $Y(s)$ vara Laplacetransformnen av $y(t)$. Laplacetransformering av ekvationen ger

$$sY(s) - y(0) + 3Y(s) = \frac{1}{s}e^{-s},$$

vilket ger

$$(s+3)Y(s) = 1 + \frac{1}{s}e^{-s}.$$

Alltså är

$$Y(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s(s+3)}e^{-s} = \frac{1}{s+3} + \frac{1}{3}\frac{1}{s}e^{-s} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+3}e^{-s}.$$

Invers Laplacetransformering ger

$$y(t) = e^{-3t} + \frac{1}{3}U(t-1) - \frac{1}{3}e^{-3(t-1)}U(t-1).$$

Härmed får vi svaret:

$$\boxed{y(t) = e^{-3t} + \frac{1}{3}\left(1 - e^{-3(t-1)}\right)U(t-1)}$$

---

**3)** a) Insättning av $u(x,t) = X(x)T(t)$ i ekvationen ger $X''T = 2XT'$, varur

$$\frac{X''}{X} = \frac{2T'}{T} = \lambda,$$

där $\lambda$ är en konstant. Vi får $T' = \frac{\lambda}{2}T$, vilket ger $T(t) = c_1 e^{\frac{\lambda}{2}t}$, för någon konstant $c_1$. Eftersom vi ska ha $T(t) \to 0$ då $t \to \infty$ så måste vi ha $\lambda < 0$. Skriv $\lambda = -\alpha^2$. Detta ger $X'' + \alpha^2 X = 0$ med allmän lösning $X = c_2 \cos \alpha x + c_3 \sin \alpha x$. Vi får produktlösningarna

$$u(x,t) = e^{-\alpha^2 t/2}\left(A\cos\alpha x + B\sin\alpha x\right), \tag{2}$$

där $\alpha > 0$ och $A, B$ är godtyckliga konstanter. Svaret är:

$$\boxed{u(x,t) = e^{-\alpha^2 t/2}\left(A\cos\alpha x + B\sin\alpha x\right),}$$

där $\alpha > 0$ och $A, B$ är godtyckliga konstanter.

b) Från (2) får vi $u(0,t) = e^{-\alpha^2 t/2}A = 0$, vilket ger $A = 0$, och därför är $u(1,t) = e^{-\alpha^2 t/2}B\sin\alpha = 0$. Om $B \neq 0$ måste vi ha $\sin\alpha = 0$, vilket ger $\alpha = n\pi$, där $n$ är ett heltal. Vi får att

$$u(x,t) = Be^{-n^2\pi^2 t/2}\sin n\pi x,$$

$n \geq 1$, som också inkluderar den trivial lösningen då $B = 0$.

$$\boxed{u(x,t) = Be^{-n^2\pi^2 t/2}\sin n\pi x,\ n \geq 0.}$$

---