

# SF1625 Envariabelanalys

## Föreläsning 20

Lars Filipsson

Institutionen för matematik  
KTH

13 oktober 2016

## Högre betyg!

- Serier och generaliserade integraler
- Svåra substitutioner i integraler
- Extra tillämpningar av integraler
- Stort ordo i Taylors formel
- Några roliga bevis
- Lite läxuppgifter
- Kapitel 8 om kurvor i planet

## Uppgift 5 från tentan 2015-04-07

Låt  $f(x) = 1 - (x - 1)^2$ ,  $0 \leq x \leq 2$ . Gör en enkel skiss av funktionsgrafen  $y = f(x)$  och finn den punkt  $(x_0, y_0)$  på funktionsgrafen som gör arean av triangeln med hörn i  $(0, 0)$ ,  $(x_0, 0)$  och  $(x_0, y_0)$  maximal.

## Uppgift ni hade i läxa:

Avgör om  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$  är konvergent eller divergent.

## Dagens tentaproblem 1 från förra gången:

Avgör om det är sant att

$$\frac{1}{2} < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m(m+1)}} < \frac{\pi+1}{2}$$

## Dagens tentaproblem 2 från förra gången:

Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \arctan \frac{k}{n}$$

## Uppgift:

Är den generaliserade integralen konvergent eller divergent?

$$\int_3^{\infty} \frac{2x + e^{-x}}{x^2 + \ln x} dx$$

# Svåra substitutioner i integraler

## Uppgift:

Beräkna integralerna med lämplig substitution:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \qquad \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} dx$$
$$\int \frac{1}{2+\cos x} dx$$



**Masscentrum (i en dimension):**

$$x_T = \frac{\int_a^b x\rho(x) dx}{\int_a^b \rho(x) dx}$$

(Se tavlan)

# Taylor's formel och ordoräkning

**Taylorpolynomet**  $p_n$  av grad  $n$  kring  $x = a$  till  $f$  är:

$$p_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

**Användningen** av polynomet är approximation:

$$f(x) \approx p_n(x), \quad \text{för } x \text{ nära } a.$$

**Felet** i approximationen är

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad \text{för något } c \text{ mellan } x \text{ och } a.$$

**Detta** (felet) kan också skrivas

$$\mathcal{O}\left((x-a)^{n+1}\right)$$

om man inte behöver räkna så exakt (t ex vid gränsvärden).

## Uppgifter:

A. Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till  $\cos x$  och bestäm ett närmevärde till  $\cos \frac{1}{10}$ . Avgör om felet är mindre än 0.00001.

B. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$$

## **Andragradskurvor:**

Ellipser, Hyperbler, Parabler

Parameterkurvor

## Kontinuerliga funktioner på slutna begränsade intervall

Om  $f$  är kontinuerlig på det slutna begränsade intervallet  $[a, b]$  så måste  $f$  anta ett största och ett minsta värde.

## **Definitionen av Exp och Log** och bevis av deras grundläggande egenskaper