KTH Matematik *A*

Lappskrivning 3, version A, i SF1633 Differentialekvationer I.

fredag 14 oktober 2016, klockan 10:15 - 12:00

LÖSNINGSFÖRSLAG

---

1) a) Koefficienten ges för $n \geq 1$ av

$$b_n = 2\int_0^1 \frac{x}{2}\sin n\pi x\,dx = \int_0^1 x\sin n\pi x\,dx.$$

Partiell integration ger

$$\begin{aligned} b_n &= \left[-x\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\right]_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos n\pi x\,dx \\ &= -\frac{\cos n\pi}{n\pi} + \frac{1}{n\pi}\left[\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right]_0^1 = -\frac{\cos n\pi}{n\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}, \end{aligned}$$

eftersom $\sin n\pi = 0$ för alla heltal n. Vi får, för $0 < x < 1$, sinusserien

$$\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin n\pi x \tag{1}$$

Svar:

$$\boxed{\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin n\pi x, \quad 0 < x < 1.}$$

b) Funktionerna $\sin n\pi x$ har alla perioden 2, varför högerledet i (1) har perioden 2.

---

2) Låt $Y(s)$ beteckna Laplacetransformen av $y(t)$. Laplacetransformering ger

$$s^2Y(s) - y(0)s - y'(0) + Y(s) = e^{-s},$$

vilket ger

$$(s^2+1)Y(s) = s + e^{-s}.$$

Alltså är

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}e^{-s}.$$

Invers Laplacetransformering ger att

$$y(t) = \cos t + U(t-1)\sin(t-1).$$

Svar:

$$\boxed{y(t) = \cos t + U(t-1)\sin(t-1).}$$

---

3) Vi ansätter en produktläsning $u(x,t) = X(x)T(t)$. Insättning i ekvationen ger

$$X'T = 2XT' - XT,$$

vilket ger

$$\frac{X'}{X} = \frac{2T'}{T} - 1 = \lambda,$$

där λ är en konstant. Vi får ekvationerna

$$X' = \lambda X, \quad T' = \frac{1}{2}(\lambda+1)T,$$

vilket ger

$$X(x) = c_1 e^{\lambda x}, \quad T(t) = c_2 e^{(\lambda+1)t/2},$$

där c_1 och c_2 är godtyckliga konstanter. Alltså har vi produktlösningarna

$$u(x,t) = Ae^{\lambda x + (\lambda+1)t/2},$$

där λ, A är godtyckliga konstanter. Eftersom ekvationen är linjär och homogen, så ger linjärkombinationer av produktlösningar också lösningar till ekvationen. Vi ser att $u(x,0)$ är en linjärkombination av två funktioner, vilket gör ansatsen

$$u(x,t) = A_1 e^{\lambda_1 x + (\lambda_1+1)t/2} + A_2 e^{\lambda_2 x + (\lambda_2+1)t/2}$$

naturlig. Med denna ansats blir

$$u(x,0) = A_1 e^{\lambda_1 x} + A_2 e^{\lambda_2 x} = 2e^x - 4e^{-x}.$$

Vi ser att detta är uppfyllt om vi väljer $A_1 = 2$, $\lambda_1 = 1$, $A_2 = -4$ och $\lambda_2 = -1$. Vi ser att

$$u(x,t) = 2^{x+t} - 4e^{-x}$$

löser vårt problem.
Svar:

$$\boxed{u(x,t) = 2^{x+t} - 4e^{-x}}$$
