SF1661 Perspektiv på matematik
Tentamen 21 oktober 2016 kl 08.00 – 13.00

Skrivtid: 5 timmar
Inga tillåtna hjälpmedel
Examinator: Hans Thunberg

Tentamen består av nio uppgifter som var och en ger maximalt fyra poäng. För full poäng på en uppgift krävs att lösningarna är väl presenterade och lätta att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

På de tre första uppgifterna, som utgör del I, är det endast möjligt att få 0, 3 eller 4 poäng. Dessa tre uppgifter kan ersättas med resultat från den löpande examinationen. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning eller godkänd seminarieserie ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning eller seminarieserie ger 4 poäng. För att höja från den löpande examinationen från 3 poäng till 4 krävs att hela uppgiften löses.

Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

Uppgifterna 4 – 6 utgör del II. De tre sista uppgifterna utgör del III. För betygen A och B krävs ett visst antal poäng på del III.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del III	6	3	-	-	-	-

Dessa poänggränser är preliminära och kan komma att justeras.

Del I

(1) Definiera först vad som menas med ett *primtal*. Formulera sedan *Primtalssatsen* och använd den för att ge en approximation av hur många primtal det finns som är mindre än en milliard (10^9).

(2) Formulera binomialsatsen, och använd sedan binomialsatsen för att utveckla och förenkla

$$(x + 2y)^5 + (2x + y)^5.$$

(3) Låt p vara polynomet $p(z) = z^4 + 2z^3 - z - 2$.

- Visa att $p(-2) = 0$.
- Bestäm alla övriga komplexa nollställen till polynomet p och markera dessa i en figur över det komplexa talplanet.
- Faktorisera polynomet p så långt som möjligt i polynom med reella koefficienter.
- Faktorisera polynomet p så långt som möjligt i polynom med komplexa koefficienter.

Del II

(4) a) Beräkna

$$\frac{1}{770} - \frac{1}{385} + \frac{1}{231}.$$

Svaret skall som vanligt förkortas så långt som möjligt.

(2 p)

b) Bestäm det största heltal k som uppfyller att $k|231$, $k|385$ och $k|770$.

(2 p)

(5) a) Visa att ekvationen

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$$

beskriver en cirkel i xy-planet. Ange också cirkelns mittpunkt och radie.

(2 p)

b) Bestäm alla komplexa tal z sådana att

$$|z + i| = |z - i|\,.$$

(2 p)

(6) Lös följande ekvationer.

a) $(\cos 2x)^2 = \cos(4x)$ (2 p) b) $(\lg x)^2 = \lg(100x)$ (2 p)

Del III

(7) Låt de fyra funktionerna $a(x)$, $A(x)$, $b(x)$ och $B(x)$ ges av att

$$a(x) = x + 1, \qquad A(x) = |a(x)|,$$
$$b(x) = x + A(x), \qquad B(x) = |b(x)|$$

Skissera de tre graferna $y = A(x)$ (1 p), $y = b(x)$ (1 p) och $y = B(x)$ (2 p).

(8) Bevisa med hjälp av induktion att

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

för alla positiva heltal n.

(9) Låt $h(x) = e^{2x} + e^x$, $h : D_h \to V_h$ med definitionsmängd $D_h = \mathbb{R}$. Visa att $V_h = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Visa också att h är en inverterbar funktion och bestäm inversfunktionen h^{-1}.
