Tentamen 21/10-16
SF1661 Perspektiv på Matematik
SVAR & LÖSNINGSFÖRSLAG

1. • Ett primtal är ett naturligt tal $p \geq 2$, sådant att p saknar äkta delare, dvs p är bara delbart med 1 och sig självt.

• **Primtalssatsen:** Låt $A(n)$ = antalet primtal i intervallet $[1, n]$, och låt $F(n) = A(n)/n$.

Då gäller att

$$F(n) \sim \frac{1}{\ln n}, \quad n \to \infty,$$

dvs

$$\frac{F(n)}{\frac{1}{\ln n}} \to 1, \quad n \to \infty.$$

• Med $n = 10^9$ fås approximationen

$$\frac{A(10^9)}{10^9} \approx \frac{1}{\ln 10^9} \Leftarrow$$

$$A(10^9) \approx \frac{10^9}{9 \ln 10} \approx \frac{10^9}{20} = 5 \cdot 10^7$$

Primtalssatsen ger alltså att det finns ungefär $5 \cdot 10^7$ primtal i intervallet $[1, 10^9]$

2.

Binomialsatsen:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

för varje heltal $n \geq 0$.

För att utveckla $(a+b)^5$ beräknar vi

$$\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1, \quad \binom{5}{1} = \binom{5}{4} = 5$$

$$\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$$

Alltså

$$(x+2y)^5 + (2x+y)^5 =$$

$$= x^5 + 5x^4 \cdot 2y + 10x^3(2y)^2 + 10x^2(2y)^3 + 5x(2y)^4 + (2y)^5 +$$

$$+ (2x)^5 + 5(2x)^4 \cdot y + 10(2x)^3 y^2 + 10(2x)^2 y^3 + 5 \cdot 2x \cdot y^4 + y^5$$

$$= x^5 + 10x^4y + 40x^3y^2 + 80x^2y^3 + 80xy^4 + 32y^5$$

$$+ 32x^5 + 80x^4y + 80x^3y^2 + 40x^2y^3 + 10xy^4 + y^5$$

$$= \underline{\underline{33(x^5+y^5) + 90(x^4y + xy^4) + 120(x^3y^2 + x^2y^3)}}$$

(SVAR)

(3.) $p(z) = z^4 + 2z^3 - z - 2$

$$p(-2) = 16 + 2(-8) - (-2) + 2) = 0 \quad \text{v.s.v.}$$

$$p(z) = z^3(z+2) - (z+2) =$$

$$= (z+2)(z^3 - 1) =$$

så övriga nollställen ges av

$$z^3 - 1 = 0 \iff z^3 = 1$$

Ansätt $z = re^{iv}$, så $z^3 = r^3 e^{i3v}$, $r > 0$.

Vi söker lösningen till

$$r^3 e^{i3v} = 1 \iff r^3 e^{i3v} = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$$

$$\iff \begin{cases} r^3 = 1, \; r > 0 \\ 3v = 0 + n \cdot 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} r = 1 \\ v = n\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Detta ger tre distinkta lösningar.

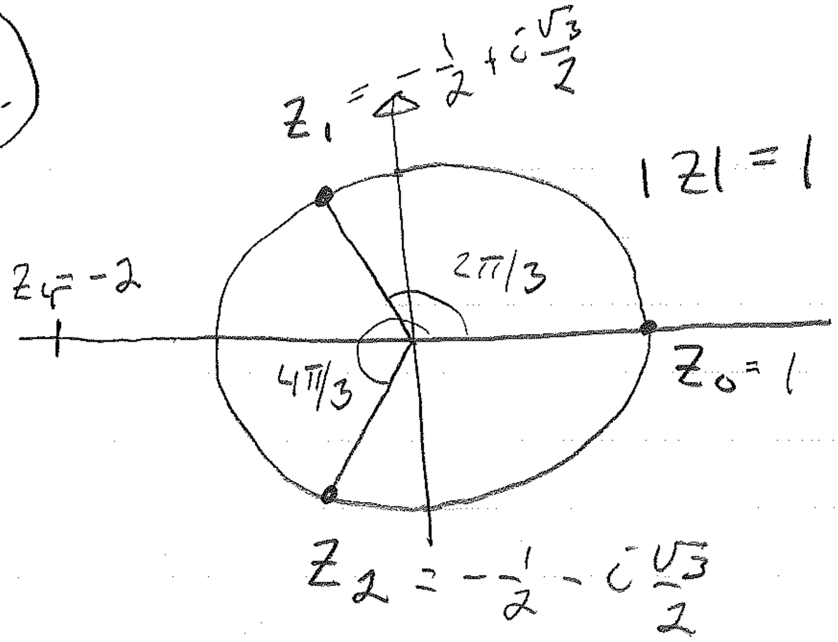
$$z_0 = e^{i0} = 1, \quad z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}, \quad z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}},$$

där vi också har att

$$z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3 forts.



Nollställen till $p(z) = z^4 + 2z^3 - z - 2$.

Faktorisering av $p(z)$.

$p(z) = (z+2)(z^3-1)$. Eftersom $z_0 = 1$ är ett nollställe delar $(z-1)$ $p(z) \Rightarrow (z-1) | (z^3-1)$.
Vi får $(z^3-1) = (z-1)(z^2+z+1)$,
och $z_1 = z_2$ är två komplexkonjugerade nollställen till z^2+z+1.

Vi får alltså

$$p(z) = (z+2)(z-1)(z^2+z+1) \quad \text{(reell faktorisering)}$$

$$= (z+2)(z-1)\left(z+\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

(komplex faktorisering)

(4) Vi primfaktoriserar nämnarna:

$$770 = 77 \cdot 10 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$$
$$385 = 5 \cdot 77 = 5 \cdot 7 \cdot 11$$
$$231 = 3 \cdot 77 = 3 \cdot 7 \cdot 11$$

a) Så $MGM(231, 385, 770) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$.

$$\frac{1}{770} - \frac{1}{385} + \frac{1}{231} = \frac{3}{3 \cdot 770} - \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 385} + \frac{2 \cdot 5}{2 \cdot 5 \cdot 231}$$

$$= \frac{3 - 6 + 10}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} = \frac{7}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11} =$$

$$= \frac{1}{10 \cdot 33} = \frac{1}{330}$$

b) Vi söker $k = SGD(231, 385, 770)$ och enligt primfaktoriseringen ovan får vi

$$k = 7 \cdot 11 = 77$$ (de gemensamma primfaktorerna)

Svar: a) $\frac{1}{330}$ b) 77.

5. a) $x^2+y^2-2x+6y+6=0$

$\Leftrightarrow (x^2-2x+1)+(y^2+6y+9)-4=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+3)^2=2^2$

vilket är ekvationen för en cirkel med medelpunkt $(1,-3)$ och radie $r=2$.

b) Sätt $z=x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$.
Då är

$|z+i|=|z-i| \Leftrightarrow |x+iy+i|=|x+iy-i|$

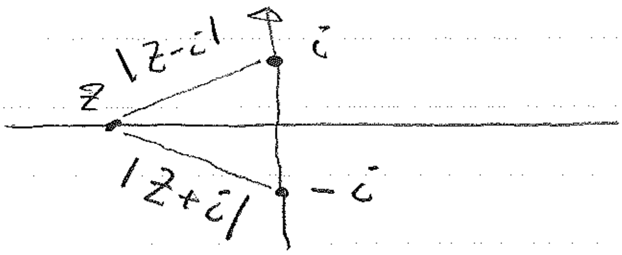
$\Leftrightarrow |x+(y+1)i|=|x+(y-1)i|$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y+1)^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+2y+1=x^2+y^2-2y+1$

$\Leftrightarrow 2y=-2y \Leftrightarrow y=0.$

Alltså är $|z+i|=|z-i|$ uppfylld för alla $z\in\mathbb{R}$, men inga andra komplexa tal.



Svar: a) Medelpunkt $(1,-3)$, radie $r=2$
b) $z\in\mathbb{R}$

(6.) a) $(\cos 2x)^2 = \cos(4x)$

$\Leftrightarrow \cos^2 2x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x = 0$

$\Leftrightarrow \sin 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2x = n \cdot \pi \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = n \cdot \frac{\pi}{2} \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$

b) $(\lg x)^2 = \lg(100x)$

$\Leftrightarrow (\lg x)^2 = \lg x + \lg 100.$

Sätt $t = \lg x$, vilket ger ekvationen

$t^2 - t - 2 = 0$

$\Leftrightarrow$

$t = -1$ eller $t = 2$.

$\lg x = -1 \Leftrightarrow x = 1/10$ och

$\lg x = 2 \Leftrightarrow x = 100$

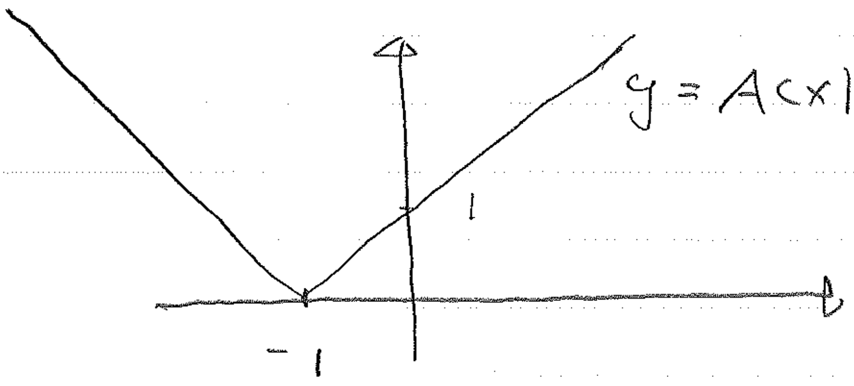
Svar: a) $x = n \cdot \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$

b) $x = 1/10 \; ; \; x = 100$

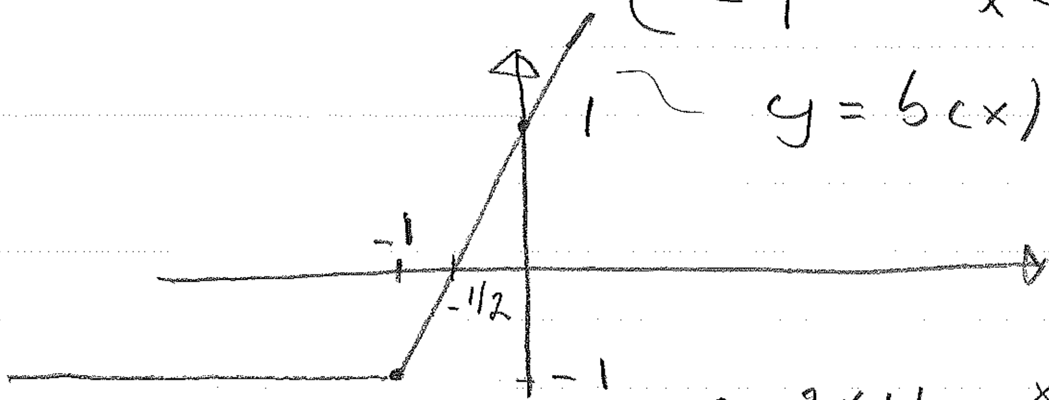
(7) $a(x) = x+1 \qquad A(x) = |a(x)| = |x+1|$

$b(x) = x + A(x) = x + |x+1|, \quad B(x) = |b(x)| = |x + |x+1||$

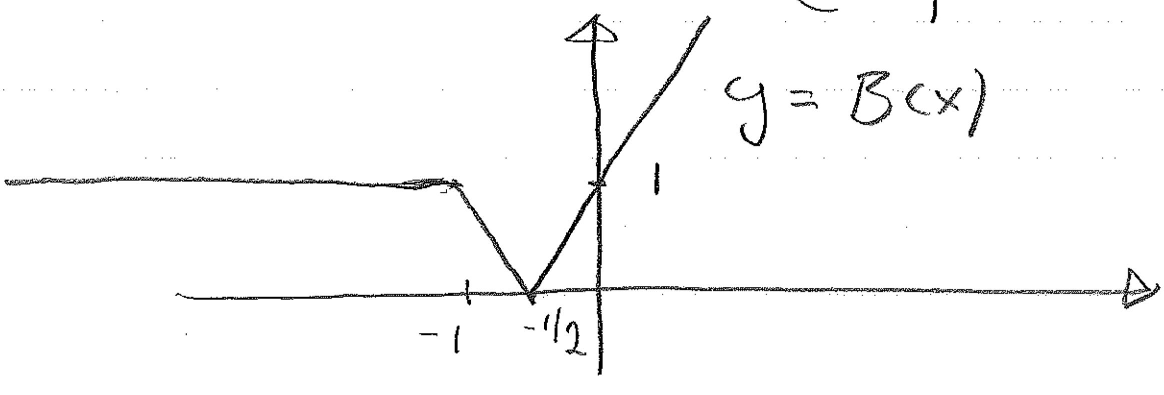
- $A(x) = |x+1| = \begin{cases} x+1 & x \geqq -1 \\ -x-1 & x < -1 \end{cases}$



- $b(x) = x + A(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \geqq -1 \\ -1 & x < -1 \end{cases}$



- $B(x) = |b(x)| = \begin{cases} 2x+1 & x \geqq -1/2 \\ -2x-1 & -1 \leqq x \leqq -1/2 \\ 1 & x < -1 \end{cases}$



(8) Induktionsbas För $n=1$ har vi

$$V.L. = \sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1 \quad \text{och}$$

$$H.L. = \frac{1\cdot(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} = 1 = V.L.$$

Så given formel är sann då $n=1$.

Induktionsantagande: Antag nu att given formel är sann för något heltal $p \geq 1$, dvs anta att

$$\sum_{k=1}^{p} k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$$

Induktionssteg För $n=p+1$ gäller då att

$$V.L. = \sum_{k=1}^{p+1} k^2 = \sum_{k=1}^{p} k^2 + (p+1)^2 \underset{\substack{\text{Induktions-}\\\text{antagandet}}}{\overset{\text{Enligt}}{=}}$$

$$= \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + (p+1)^2 =$$

$$= \frac{p(p+1)(2p+1) + 6(p+1)^2}{6} = \frac{(p+1)\left(p(2p+1)+6(p+1)\right)}{6}$$

$$= \frac{(p+1)\left(2p^2+7p+6\right)}{6}$$

$$H.L. = \frac{(p+1)(p+2)\overbrace{\left(2(p+1)+1\right)}^{(2p+3)}}{6} = \frac{(p+1)\left(2p^2+7p+6\right)}{6}$$

$$= V.L.$$

8 forts.

Vi har visat att

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- är sann för $n=1$
- är sann för $n=p+1$ OM den är sann för $n=p$, där p är ett heltal, $p \geq 1$.

Enligt induktionsprincipen är då formeln sann för alla heltal $n \geq 1$.

V.S.B.

(9.) $h(x) = e^{2x} + e^{x}$, $h : D_h = \mathbb{R} \to V_h$

Låt y vara ett godtyckligt positivt reellt tal.
Vi söker $x \in D_h = \mathbb{R}$ sådana att $y = h(x)$, dvs vi vill bestämma x sådant att

$$e^{2x} + e^{x} = y \quad , \quad 0 < y < \infty .$$

Sätt $t = e^{x}$ $(t > 0)$, och substituera:

$$t^2 + t = y$$

$$\iff (t + 1/2)^2 = y + 1/4$$

Eftersom $y > 0$ $(\Rightarrow y + 1/4 > 0)$ och $t = e^{x} > 0$ $(\Rightarrow t + 1/2 > 0)$ är detta ekvivalent med att

$$t + 1/2 = \sqrt{y + 1/4}$$

$$\iff t = -\frac{1}{2} + \sqrt{y + \frac{1}{4}}$$

$$\iff e^{x} = -\frac{1}{2} + \sqrt{y + \frac{1}{4}} \qquad \left(\begin{array}{c} \sqrt{y + 1/4} - 1/2 > 0 \\ \text{för } y > 0 \end{array} \right)$$

$$\iff x = \ln\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{y + \frac{1}{4}}\right).$$

9. (forts.) Detta visar att till varje $y \in (0,\infty)$ finns ett x s.a. $h(x) = y$. Det är också klart $h(x) = e^x + e^{2x} > 0$ för $\forall\, x \in \mathbb{R}$ ty $e^t > 0$.

- Alltså är värdemängden $V_h = (0,\infty) = \mathbb{R}_+$.

- Lösningen av ekvationen $y = h(x)$ ovan visar också att lösningen är entydig för varje $y > 0$.

$$x = \ln\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{y + \frac{1}{4}}\right)$$

Alltså är $h: D_h \to V_h$ både surjektiv och injektiv, och därmed bijektiv $\Rightarrow$ h inverterbar.

- Lösningen av ekvationen $y = h(x)$ visar också att

$$h^{-1}(y) = \ln\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{y + \frac{1}{4}}\right)$$

<u>Svar:</u> $V_h = \mathbb{R}_+ = (0,\infty)$.

h är inverterbar med invers

$$h^{-1}(x) = \ln\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{y + \frac{1}{4}}\right)$$