SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
fredag, 21 oktober 2016

KTH Teknikvetenskap

Skrivtid: 08:00-11:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Tilman Bauer

Tentamen består av sex uppgifter som vardera ger maximalt sex poäng.

Del A på tentamen utgörs av de två första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De två följande uppgifterna utgör del B och de två sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst tre poäng.

DEL A

1. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 8 & -3 & 10 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm alla lösningar till det homogena systemet $Ax = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ **(3 p)**

(b) Bestäm alla lösningar till $Ax = \begin{bmatrix} -5 & -3 \end{bmatrix}^T$. **(3 p)**

2. Låt V vara skärningen mellan de två hyperplan i $\mathbb{R}^4$ som ges av

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 0. \end{cases}$$

(a) Bestäm en bas för delrummet V. **(3 p)**

(b) Hitta ett ekvationssystem vars lösningar utgör delrummet $W = V^{\perp}$. **(3 p)**

Var god vänd!

Del B

3. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 3 & a & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix},$$

där a är en reell parameter.

(a) Bestäm egenvärdena till A och egenrum till varje egenvärde. **(3 p)**

(b) För vilka val av a är A diagonaliserbar? **(2 p)**

(c) Bestäm för $a = 0$ en inverterbar matris P och en diagonal matris D sådana att $A = PDP^{-1}$. **(1 p)**

4. Låt

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

vara en 3×3-matris. Skriv A_{ij} för determinanten av den 2×2-delmatrisen där man har strukit rad i och kolonn j. Visa att följande formel alltid gäller:

$$a_{33} \det(A) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}.$$

(6 p)

Del C

5. En reflektionen i $\mathbb{R}^3$ är en linjär avbildning

$$r_{\vec{u}}(\vec{x}) = \vec{x} - 2(\vec{u} \cdot \vec{x})\vec{u},$$

där $\vec{u}$ är en normalvektor av längd 1 till reflektionsplanet. Låt $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm en vektor $\vec{u}$ av längd 1 sådan att $r_{\vec{u}}(\vec{x})$ är en positiv multippel av $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. **(4 p)**

(b) Visa att standardmatrisen till en reflektion alltid är en ortogonal matris. **(2 p)**

6. En matris A kallas för *skevsymmetrisk* om $A^T = -A$. Antag att A är en skevsymmetrisk $n \times n$-matris. Bestäm alla vektorer $\vec{v}$ i $\mathbb{R}^n$ så att $(A\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$. **(6 p)**