KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen med lösningsförslag
fredag, 21 oktober 2016

1. Låt
$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 8 & -3 & 10 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm alla lösningar till det homogena systemet $Ax = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ **(3 p)**

(b) Bestäm alla lösningar till $Ax = \begin{bmatrix} -5 & -3 \end{bmatrix}^T$. **(3 p)**

Lösningsförslag.

a) Vi ställer upp systemets utvidgade matris och för den till trappstegsform:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 7 & 0 \\ 8 & -3 & 10 & 0 \end{array}\right) \underset{\mathrm{R}_2 - 2\mathrm{R}_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right).$$
Vi ser att sista kolumnen visar att x_3 är en fri variabel och inför parametern $t = x_3$ som ger att $x_2 = 4t$ och $4x_1 = 2x_2 - 7t$, dvs. $x_1 = \frac{1}{4}(2 \cdot 4t - 7t) = \frac{1}{4}t$.

Alla lösningar ges alltsÅ av
$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}t, \\ x_2 = 4t, \\ x_3 = t \end{cases} \quad \text{där } t \in \mathbf{R}.$$

b) På motsvarande sätt som i deluppgift a får vi här
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 7 & -5 \\ 8 & -3 & 10 & -3 \end{array}\right) \underset{\mathrm{R}_2 - 2\mathrm{R}_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & 7 \end{array}\right).$$
Inför vi även här $t = x_3$ som parameter får vi att $x_2 = 7 + 4t$ och $4x_1 = -5 + 2x_2 - 7t$, dvs. $x_1 = \frac{1}{4}(9 + t)$. Alla lösningar ges alltså av
$$\begin{cases} x_1 = \frac{9}{4} + \frac{1}{4}t, \\ x_2 = 7 + 4t, \\ x_3 = t \end{cases} \quad \text{där } t \in \mathbf{R}.$$

2. Låt V vara skärningen mellan de två hyperplan i $\mathbb{R}^4$ som ges av
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 & = 0. \end{cases}$$

(a) Bestäm en bas för delrummet V. **(3 p)**

(b) Hitta ett ekvationssystem vars lösningar utgör delrummet $W = V^{\perp}$. **(3 p)**

Lösningsförslag.

(a) Skärningen mellan de två hyperplanen består av alla punkter (x_1, x_2, x_3, x_4) som tillhör båda planen, dvs. uppfyller planens ekvationer
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Detta är ett linjärt ekvationssystem som vi kan lösa med gausseliminering,

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \mathrm{R}_2 - \mathrm{R}_1 \end{array} \sim
$$
$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -\tfrac{1}{2}\mathrm{R}_2 \end{array} \sim
$$
$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \mathrm{R}_1 - \mathrm{R}_2 \\ \end{array} \sim
$$
$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).
$$

Från slutschemat ser vi att vi kan införa exempelvis $s = x_3$ och $t = x_4$ som parametrar och hela lösningsmängden kan då uttryckas som

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s, t \text{ parametrar}).
$$

Från detta kan vi avläsa att alla lösningar (vektorerna i V) kan skrivas som linjärkombinationer av vektorerna $\boldsymbol{u}_1 = (0, -1, 1, 0)$ och $\boldsymbol{u}_2 = (0, -1, 0, 1)$, dvs. en bas för V är

$$
\{(0, -1, 1, 0), (0, -1, 0, 1)\}.
$$

(b) I deluppgift (a) konstaterade vi att vektorerna i delrummet V alla kan skrivas som linjärkombinationer av $\boldsymbol{u}_1 = (0, -1, 1, 0)$ och $\boldsymbol{u}_2 = (0, -1, 0, 1)$, dvs. $s\boldsymbol{u}_1 + t\boldsymbol{u}_2$ där s och t är skalärer.

Om en vektor $\boldsymbol{w}$ är ortogonal mot $\boldsymbol{u}_1$ och $\boldsymbol{u}_2$, dvs. $\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{u}_2 = 0$, så är $\boldsymbol{w}$ även vinkelrät mot alla vektorer i V eftersom

$$
\boldsymbol{w} \cdot (s\boldsymbol{u}_1 + t\boldsymbol{u}_2) = s\,\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{u}_1 + t\,\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{u}_2 = s \cdot 0 + t \cdot 0 = 0.
$$

Detta gör att delrummet W består av alla vektorer $\boldsymbol{w} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ som uppfyller

$$
\begin{cases} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{u}_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot (0, -1, 1, 0) = -x_2 + x_3 = 0, \\ \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{u}_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot (0, -1, 0, 1) = -x_2 + x_4 = 0. \end{cases}
$$

3. Låt

$$
A = \begin{bmatrix} 3 & a & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix},
$$

där a är en reell parameter.

(a) Bestäm egenvärdena till A och egenrum till varje egenvärde. **(3 p)**

(b) För vilka val av a är A diagonaliserbar? **(2 p)**

(c) Bestäm för $a = 0$ en inverterbar matris P och en diagonal matris D sådana att $A = PDP^{-1}$. **(1 p)**

Lösningsförslag. (a) Egenvärdena får vi genom att lösa den karakteristiska ekvationen:

$$
\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} (3-\lambda) & a & 0 \\ 0 & (4-\lambda) & 1 \\ 0 & 2 & (5-\lambda) \end{vmatrix} = 0
$$

$$
\Rightarrow (3-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = 0 \Rightarrow (3-\lambda)(\lambda-3)(\lambda-6) = 0
$$

Alltså har matrisen A två egenvärden, $\lambda_1 = 6$ och $\lambda_2 = 3$ (dubbelrot till ekvationen).
Låt E_λ beteckna egenrummet som hör till egenvärdet λ. Egenrummet som hör till $\lambda_1 = 6$ dvs E_6 bestämmer vi genom att lösa $(A - 6I)\vec{u} = \vec{0}$ dvs.

$$\begin{bmatrix} -3 & a & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Detta ger systemet

$$\begin{cases} -3x + ay & = 0 \\ -2y + z & = 0 \\ 2y - z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + ay & = 0 \\ -2y + z & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases}.$$

Härav

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} a \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Därmed

$$E_{\lambda_1} = \text{span}(\begin{bmatrix} a \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix})$$

Egenrummet som hör till $\lambda_2 = 3$ dvs E_3 bestämmer vi genom att lösa $(A - 3I)\vec{u} = \vec{0}$ dvs.

$$\begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Detta gör systemet

$$\begin{cases} ay & = 0 \\ y + z & = 0 \\ 2y + 2z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z + y & = 0 \\ ay & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases}.$$

Två fall: $a \neq 0$ och $a = 0$.

Om $a \neq 0$ får vi $y = 0$, $z = 0$ och $x = t$. Härav $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Därmed $E_{\lambda_2} = \text{span}(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix})$ om $a \neq 0$. Notera att $dim(E_{\lambda_2}) = 1$ i det här fallet.

Om $a = 0$ har vi systemet $\begin{cases} z + y & = 0 \\ 0 & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases}$. Härav $x = t$, $y = -s$ och $z = s$ dvs

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ om } a = 0.$$

Därmed $E_{\lambda_2} = \text{span}(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix})$ om $a = 0$. Notera att $dim(E_{\lambda_2}) = 2$ i det här fallet.

(b) En matrisen av typen $n \times n$ är diagonaliserbar om och endast om $\sum_k dim(E_{\lambda_k}) = n$. I vårt fall är $dim(E_{\lambda_1}) + dim(E_{\lambda_2}) = 3$ endast om $a = 0$. Enligt a-delen är matrisen diagonaliserbar endast om $a = 0$.

(c) Matrisen P består av tre linjärt oberoende egenvektorer; D har på diagonalen motsvarande egenvärden.

Exempelvis $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ och $D = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

4. Låt

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

vara en 3×3-matris. Skriv A_{ij} för determinanten av den 2×2-delmatrisen där man har strukit rad i och kolonn j. Visa att följande formel alltid gäller:

$$a_{33} \det(A) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}.$$

(6 p)

Lösningsförslag. Utveckling av höger led ger

$$\begin{aligned}
A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} &= \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33}^2 + a_{13}a_{23}a_{31}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{33} \\
&\quad - a_{12}a_{21}a_{33}^2 - a_{13}a_{23}a_{31}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{33} \\
&= a_{33}(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}) \\
&= a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Den sista likheten följer av definitionen av en 3×3 determinant.

5. En reflektionen i $\mathbb{R}^3$ är en linjär avbildning

$$r_{\vec{u}}(\vec{x}) = \vec{x} - 2(\vec{u} \cdot \vec{x})\vec{u},$$

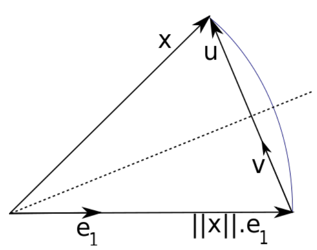
där $\vec{u}$ är en normalvektor av längd 1 till reflektionsplanet. Låt $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm en vektor $\vec{u}$ av längd 1 sådan att $r_{\vec{u}}(\vec{x})$ är en positiv multippel av $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. **(4 p)**

(b) Visa att standardmatrisen till en reflektion alltid är en ortogonal matris. **(2 p)**

Lösningsförslag.

a) Eftersom reflektioner bevarar längder av vektorer så ser vi att den sökta reflektionen måste avbilda $\vec{x}$ på $\|\vec{x}\|\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Vi inser geometriskt att reflektionen vi söker är reflektionen genom planet som halverar vinkeln mellan $\vec{x}$ och $\vec{e}_1$ och har normalvektor $\vec{x} - \|x\|\vec{e}_1$:



Detta ger normalvektorn

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Vi delar vektorn genom dess längd och får normalvektorn $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Vi verifierar att vi har räknat rätt:

$$r_{\vec{u}}(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} - \frac{2}{3}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) Vi kan skriva

$$r_{\vec{u}}(\vec{x}) = I\vec{x} - 2(\vec{u})(\vec{u} \cdot \vec{x}) = I\vec{x} - 2(\vec{u}\vec{u}^T)\vec{x} = (I - 2\vec{u}\vec{u}^T)\vec{x}.$$

Därav ges standardmatrisen till $r_{\vec{u}}$ som $I - 2\vec{u}\vec{u}^T$, en symmetrisk matris. Dessutom gäller för alla reflektioner $f_{\vec{u}}(f_{\vec{u}}(\vec{x})) = \vec{x}$. Alltså har vi att $MM^T = MM = I$, vilket innebär att M är ortogonal.

6. En matris A kallas för *skevsymmetrisk* om $A^T = -A$. Antag att A är en skevsymmetrisk $n \times n$-matris. Bestäm alla vektorer $\vec{v}$ i $\mathbb{R}^n$ så att $(A\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$. **(6 p)**

Lösningsförslag. Om vi betraktar vektorn $\boldsymbol{v}$ som en kolumnvektor så kan skalärprodukterna $(A\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{v} \cdot (A\boldsymbol{v})$ skrivas i matrisform som

$$\begin{aligned} (A\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v} &= (A\boldsymbol{v})^T\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^T A^T \boldsymbol{v}, \\ \boldsymbol{v} \cdot (A\boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{v}^T A\boldsymbol{v}, \end{aligned}$$

för alla vektorer $\boldsymbol{v}$.

Använder vi att A är skevsymmetrisk, dvs. $A^T = -A$, så har vi att

$$(A\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^T A^T \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^T(-A)\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}^T A\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \cdot (A\boldsymbol{v}) = -(A\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v}$$

där vi använt att skalärprodukten är kommutativ, dvs. $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$, i den sista likheten.

Adderar vi $(A\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v}$ till båda led i sambandet $(A\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v} = -(A\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v}$ får vi att $2(A\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v} = 0$ och detta visar att vi har att $(A\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v} = 0$ för alla vektorer $\boldsymbol{v}$.