

REGLERTEKNIK, KTH

REGLERTEKNIK AK EL1000

Tentamen 2016–10–22, kl 9:00 – 14:00

Hjälpmedel: Kursboken i Reglerteknik AK
(Glad, Ljung: Reglerteknik eller motsvarande),
räknetabeller, formelsamlingar och räknedosa.
Observera att slides av föreläsningar och övningsmaterial
(övningsuppgifter, ex-tentor och lösningar) INTE är tillåtna hjälpmedel.

Observandum: Behandla inte mer än en uppgift per blad.
Varje steg i lösningen skall motiveras.
Bristfällig motivering kan ge poängavdrag.
Skriv svar (med enhet i förekommande fall).
Skriv namn och personnummer på varje inlämnat ark.
Skriv endast på en sida per ark.
Fyll i antalet inlämnade ark på omslaget.

Tentamen består av fem uppgifter, som vardera bedöms med 10 poäng.
Poängsättningen för deluppgifter har markerats.

Betygsgränser: betyg Fx: ≥ 21
betyg E: ≥ 23
betyg D: ≥ 28
betyg C: ≥ 33
betyg B: ≥ 38
betyg A: ≥ 43

Ansvarig: Bo Wahlberg 08 790 72 42

Resultat: Anslås på
<https://www.kth.se/student/minasidor/>
senast 2016-11-19.

Lycka till!

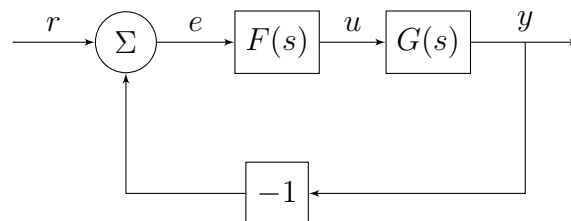
1. (a) Betrakta det återkopplade systemet i Figur 1 och låt

$$F(s) = 1, \quad G(s) = \frac{1}{s+2}.$$

Bestäm utsignalen $y(t)$ för alla $t \geq 0$ vid ett enhetssteg i referenssignalen,

$$r(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}.$$

(2p)



Figur 1: Blockdiagram för det återkopplade systemet för Uppgift 1a).

- (b) Kim har diabetes, vilket innebär att kroppen inte kan tillverka det insulin som behövs för att bryta ned sockret i blodet. Kim har en automatisk insulinpump som mäter sockerhalten i blodet och administrerar rätt mängd insulin för att hålla sockerhalten på en jämn nivå. På så sätt motverkas de förändringar i blodsockret som beror på den mat Kim äter.

Betrakta Kims blodsockerreglering som en reglerteknisk process och föreslå systemets

- (i) insignal u
- (ii) utsignal y
- (iii) referenssignal r
- (iv) störsignal v

Motivera väl!

(3p)

(c) Ett återkopplat system är givet på tillståndsform enligt:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} r(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Beräkna stationära värdet av reglerfelet $e(t) = r(t) - y(t)$ om referenssignalen är

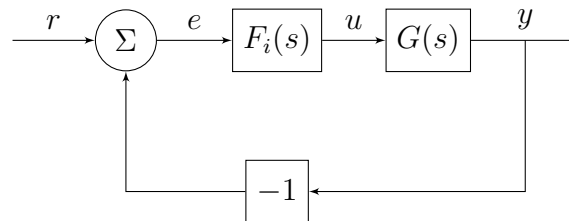
$$r(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 5 & t \geq 0 \end{cases}.$$

(3p)

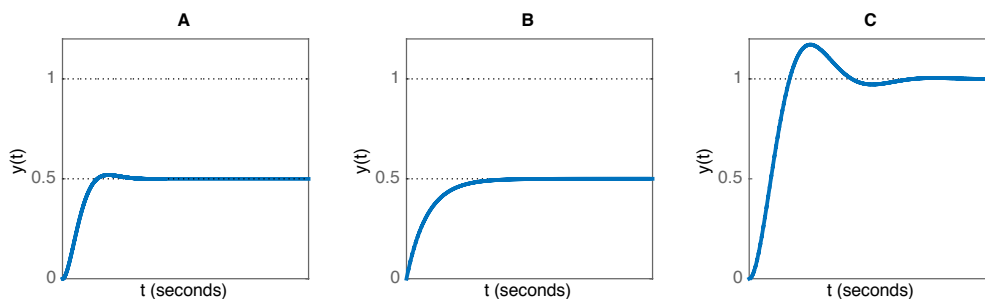
(d) Ett system av andra ordningen regleras enligt Figur 2, där

$$F_1(s) = 6, \quad F_2(s) = 6 + s, \quad F_3(s) = 6 + \frac{12}{s}.$$

I Figur 3 visas tre kvalitativa stegsvar från ett enhetssteg i referenssignalen $r(t)$. Para ihop respektive regulator $F_1(s), F_2(s), F_3(s)$ med rätt stegsvar A, B, C . Motivera ditt svar! (2p)



Figur 2: Blockdiagram för det återkopplade systemet för Uppgift 1d).



Figur 3: Stegsvär för uppgift 1d)

2. (a) Studera systemet

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \sin(x_2(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= x_2(t) + u(t)\end{aligned}$$

(i) Linjärisera systemet kring jämviktspunkten $(x_1, x_2, u) = (0, \pi, u_0)$. Ange u_0 och motsvarande linjära tillståndsmodell. (2p)

(ii) Visa att det linjäriserade systemet är styrbart och bestäm en tillståndsåterkoppling $\Delta u(t) = -L\Delta x(t)$ som placerar polerna hos det slutna systemet i -3 och -4 . (2p)

(b) Betrakta nu systemet

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

med

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Visa att systemet är observerbart och bestäm en observatör med dubbelpol i $-\alpha$, $\alpha > 0$. (2p)

(ii) Antag nu att en störning $v(t)$ påverkar utsignalen på systemet, dvs.

$$y(t) = Cx(t) + v(t).$$

Bestäm överföringsfunktionen från störsignal $v(t)$ till skattningsfelet

$$\tilde{y}(t) = y(t) - \hat{y}(t),$$

där $\hat{y}(t)$ är observatörens skattning av utsignalen $y(t)$ enligt Uppgift 2b-i ovan. (4p)

3. En vanlig överföringsfunktion inom processindustri är

$$G(s) = \frac{K_1}{1 + T_1 s} e^{-T_2 s}, \quad K_1, T_1, T_2 \geq 0.$$

- (a) Parametrarna T_1 och T_2 är båda tidskonstanter för processen i fråga, men deras fysikaliska betydelse skiljer sig åt. Tolka och ge ett rimligt förslag på hur vardera kan uppkomma i en fysisk process? (2p)
- (b) Antag att man med hjälp av enkla stegsvarsförsök fått fram följande skattningar av de obekanta parametrarna i modellen ovan:

$$K_1 = 2, \quad T_1 = 60, \quad T_2 = 10.$$

Detta ger överföringsfunktionen

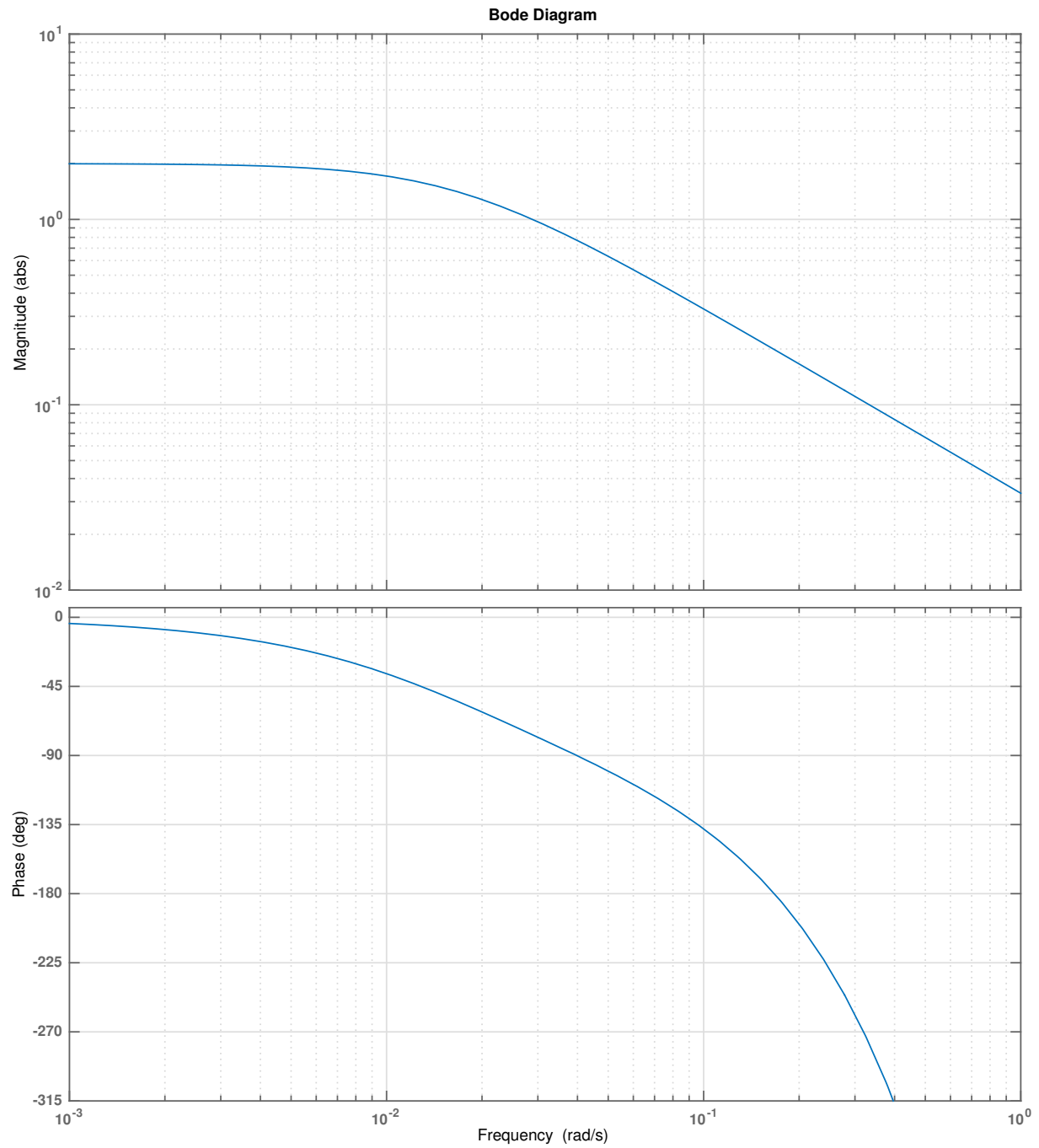
$$G(s) = \frac{2}{1 + 60s} e^{-10s}.$$

Bestäm med hjälp av lead-lag design en regulator $F(s)$ så att:

- $G_o(s) = F(s)G(s)$ har dubbel så stor skärfrekvens som $G_o(s) = G(s)$
- $G_o(s) = F(s)G(s)$ har lika stor fasmarginal som $G_o(s) = G(s)$
- Motsvarande slutna system ger ett stationärt värde som inte avviker mer än 5% från en konstant referenssignal.

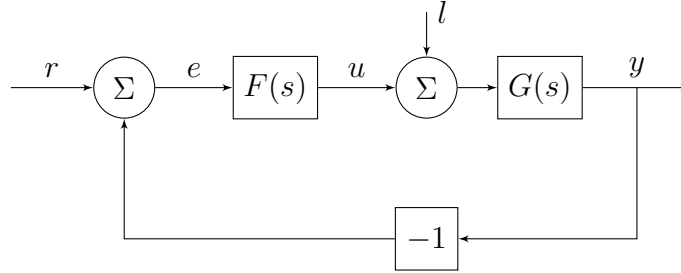
Använd tumreglerna $\tau_I = \frac{10}{\omega_c}$ och att lag-länken sänker fasen med 5.7° vid den önskade skärfrekvensen. Om du vill kan du använda Figur 4 på nästa sida som visar Bode-diagrammet för det okompenserade systemet $G(s)$. (5p)

- (c) Antag att vi i prövar regulatorn vi konstruerat i Uppgift 3b) och väljer ett så stort värde på parametern γ som tillåts utifrån kraven. Vi gör ett stegsvar på det återkopplade systemet men är inte nöjda med hur snabbt utsignalen ställer in sig efter referenssignalen. För att sänka insvängingstiden prövar vi att minska lag-parametern τ_I . Ange ett krav på hur mycket vi maximalt kan minska τ_I utan att motsvarande återkopplade system blir instabilt? (3p)



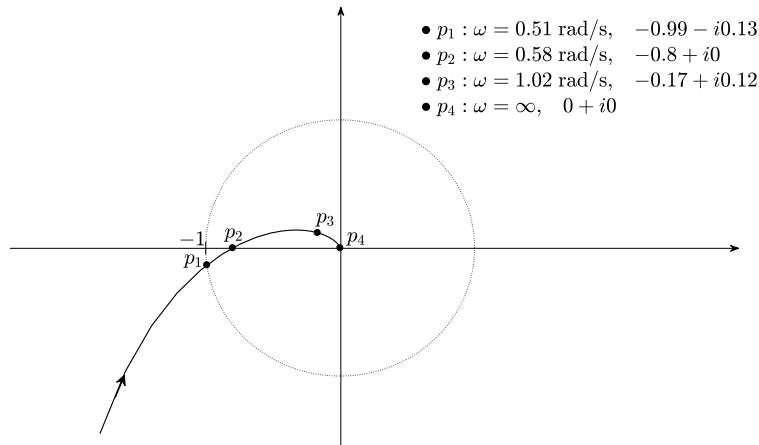
Figur 4: Bode-diagram för det okompenserade systemet $G(s)$ i Uppgift 3b.

4. Studera det återkopplade systemet i Figur 5.



Figur 5: Blockdiagram för det återkopplade systemet för Uppgift 4).

$G(s)$ är överföringsfunktionen för systemet som innehåller en ren integration (en pol i $s = 0$), men inga poler strikt i höger halvplan. Nyquistkurvan för $G_o(s) = G(s)$ är återgiven i Figur 6. Frekvenssvaret $G(i\omega)$ för fyra markerade frekvenser är givna i figuren.



Figur 6: Nyquistkurva för öppna systemet $G_o(s)$ när $F(s) = 1$.

- (a) Antag att man önskar öka det återkopplade systemets snabbhet. Inför en P-regulator $F(s) = K_P$ och bestäm K_P så att det kompenserade systemets skär-frekvens blir dubbelt så stor som för $F(s) = 1$. Är det resulterande återkopplade systemet stabilt? (2p)

- (b) Inför istället en ren D-regulator $F(s) = K_D s$ och bestäm K_D så att det kompenserade systemets skärfrekvens blir dubbelt så stor som för $F(s) = 1$. Ange fasmarginalen φ_m . Är det resulterande återkopplade systemet stabilt?

Ledning: Beräkna överföringsfunktionen från insignalstörning l till utsignal y enligt Figur 5. (4p)

- (c) Låt oss kombinera regulatorerna i Uppgift 4a) och Uppgift 4b) genom att använda regulatorn

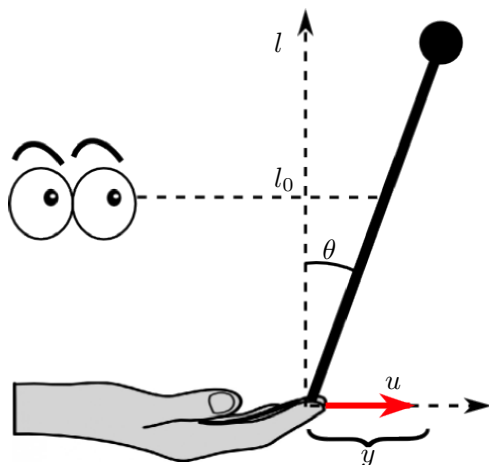
$$F(s) = \alpha K_P + \sqrt{1 - \alpha^2} K_D s, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

där K_P är framräknad i Uppgift 4a) och K_D är framräknad i Uppgift 4b).

- (i) Visa att man får samma skärfrekvens som i Uppgift 4a) och i Uppgift 4b) om man använder ovanstående $F(s)$ (2p)

- (ii) Vilken fasmarginal får man om använder ovanstående regulator $F(s)$ med $\alpha = 1/\sqrt{2}$? Är det resulterande återkopplade systemet stabilt? (2p)

5. Antag att du försöker balansera en inverterad pendel genom att föra din hand fram och tillbaka – se Figur 7.



Figur 7: En inverterad pendel som regleras av en hand.

En linjäriserad överföringsfunktion från hastigheten u vid fästet till positionsfelet y ges av:

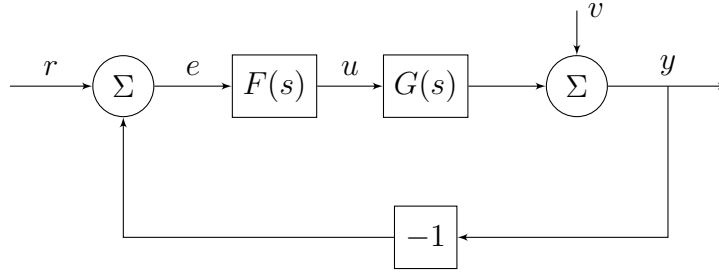
$$G(s) = \frac{(l - l_0)s^2 - g}{s^2(Mls^2 - (M + m)g)},$$

där l är pendelns längd, l_0 är höjden som du tittar på, M är massan för handen och m är massan för pendeln.

Under antagandet att $l_0 < l$ ges polerna och nollställena till $G(s)$ av:

$$\begin{array}{ll} \textbf{Poler} & p_1 = 0, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = -\sqrt{\frac{(M+m)g}{Ml}}, \quad p_4 = \sqrt{\frac{(M+m)g}{Ml}} \\ \textbf{Nollställena} & z_1 = -\sqrt{\frac{g}{l-l_0}}, \quad z_2 = \sqrt{\frac{g}{l-l_0}} \end{array}$$

Du återkopplar avståndet i framåtled med en regulator $F(s)$, som själv har stabila poler och nollställena, enligt Figur 8. Motsvarande återkopplade system antas vara stabilt.



Figur 8: Blockdiagram för den inverterade pendeln $G(s)$ återkopplat med regulatorn $F(s)$.

Vi ska undersöka känsligheten för störningar med hjälp av Bodes integralsats, som anger en fundamental begränsning på hur känsligheten kan påverkas med återkoppling. En allmän variant av Bodes integralsats ges av:

$$\log |S_{mf}(s_0)| = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \log |S(i\omega)| \frac{\sigma_0}{\sigma_0^2 + (\omega - \omega_0)^2} d\omega, \quad (1)$$

där $S(s)$ är känslighetsfunktionen (dvs. överföringsfunktionen från v till y i Figur 8), $S_{mf}(s)$ är en minimufasrealisation av $S(s)$ (beskrivs nedan i Uppgift 5b)), och $s_0 = \sigma_0 + \omega_0 i$ är ett komplext tal. Denna variant av Bodes integralsats är mer generell än den i *Glad & Ljung*, s. 124, och kan användas för att visa hur nollställena i höger halvplan begränsar känslighetsfunktionen.

- (a) Bestäm känslighetsfunktionen $S(s)$ för det återkopplade systemet givet i Figur 8 med modellen ovan för den inverterade pendeln. (1p)

- (b) Faktorisera känslighetsfunktionen $S(s)$ i Uppgift 5a) i en minimumfasdel och en övrig del (ett allpassfilter), så att den blir på formen:

$$S(s) = S_{mf}(s)S_{ap}(s)$$

där $S_{mf}(s)$ är minimumfasdelen (har alla nollställena och alla poler strikt i vänster halvplan). Allpassfilterdelen har här formen

$$S_{ap}(s) = \frac{s - c}{s + c}$$

för någon konstant $c \geq 0$. Ange $S_{mf}(s)$ och $S_{ap}(s)$ i ditt svar.

(4p)

- (c) Använd den allmänna varianten av Bodes integralsats given av formel (1) ovan och resultatet i Uppgift 5b) för att härleda följande krav på känslighetsfunktionen för den återkopplade inverterade pendeln:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \log |S(i\omega)| \frac{z_2}{z_2^2 + \omega^2} d\omega = \log \left| \frac{z_2 + p_4}{z_2 - p_4} \right|,$$

där

$$z_2 = \sqrt{\frac{g}{l - l_0}}, \quad p_4 = \sqrt{\frac{(M + m)g}{Ml}} \quad (3p)$$

- (d) Tolka resultatet i Uppgift 5c) för fallet då massan M är stor relativt till massan m och l_0 är liten relativt längden l . Beskriv också hur funktionen

$$\frac{z_2}{z_2^2 + \omega^2}$$

i integranden kan tolkas som en frekvensviktning av $\log |S(i\omega)|$.

(2p)