KTH, Matematik
Maria Saprykina

Lösningsförslag till tentamen i SF1629,
Differentialekvationer och Transformer II (del 1)

1 a). Lös ekvationen **3p.**

$$3y^2y' + 16x = 2xy^3.$$

b). Finn en lösning som är begränsad på intervallet $x \in (0, \infty)$. **1p.**

Lösning: Efter omskrivningen $3y^2y' = 2x(y^3 - 8)$, ser man att ekvationen är separabel.

1). Separera variabler och integrera (OBS att på detta steg delar vi ekvationen med $y^3 - 8$; fallet $y^3 = 8 \Leftrightarrow y = 2$ måste betraktas separat!)

$$\int \frac{3y^2dy}{y^3 - 8} = \int 2xdx \Leftrightarrow y^3 = 8 + Ke^{x^2},$$

där $K \neq 0$ är en konstant. Observera att alla lösningar $y = \left(8 + Ke^{x^2}\right)^{1/3}$ är obegränsade på $x \in (0, \infty)$.

2). Betraktar fallet $y = 2$. Vi noterar att $y(t) = 2$ för alla t är en ekvilibriumlösning. Denna lösning är begränsad på $x \in (0, \infty)$.

2. Klassificiera med avseende på typ och stabilitet/instabilitet de kritiska punkterna till systemet

$$\begin{cases} x' = x + xy \\ y' = 4y - 2xy. \end{cases}$$

Här $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Lösning: De kritiska punkterna ges av

$$\begin{cases} x + xy = 0 \\ 4y - 2xy = 0 \end{cases}$$

vilket har två lösningar: $(0, 0)$ och $(2, -1)$. Systemets Jakobimatris är

$$\begin{pmatrix} 1 + y & x \\ -2y & 4 - 2x \end{pmatrix}.$$

$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ har egenvärden 1 och 4, båda med positiv realdel. Kritiska punkten $(0, 0)$ är alltså en instabil nod.

$J(2, -1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ har egenvärdena ± 2. Kritiska punkten är en sadel och alltså instabil.

3. Bestäm allmänna lösningen till differentialekvationen

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = -x^2, \quad x > 0,$$

givet att en lösning till motsvarande homogena ekvation är $y_1(x) = x^2$.

Lösning: Vi ska söka losningar till den inhomogena ekvationen på formen $y(x) = u(x)y_1(x) = u(x)x^2$. Observera att varje lösning $y(x)$ kan skrivas på denna form eftersom $x^2 > 0$ i vårt intervall. Sätter in ansatsen i ekvationen och använder identiteten $x^2y_1'' - 4xy_1' + 6y_1 = 0$:

$$x^2(u''y_1 + 2u'y_1' + y_1''u) - 4x(uy_1' + u'y_1) + 6uy_1 = -x^2 \Leftrightarrow u'' = -x^{-2}.$$

Detta är ekvivalent med att $u(x) = \ln x + C_1x + C_2$, där C_1 och C_2 är godtyckliga konstanter. Alltså, för varje val av konstanter är

$$y(x) = x^2 \ln x + C_1x^3 + C_2x^2$$

en lösning till den ursprungliga inhomogena ekvationen, och varje lösning kan uttryckas på denna fårm. Således, har vi hittat den allmänna lösningen till ekvationen.

4. Funktionerna $y_1 = 1 + x$, $y_2 = 1 + 2x$ och $y_3 = 1 + e^x$, är lösningar till den inhomogena ekvationen

$$(x-1)y'' - xy' + y = f(x), \quad x > 1.$$

a). Bestäm allmänna lösningen till den homogena ekvationen

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0, \quad x > 1.$$

Motivera väl!

b). Lös den inhomogena ekvationen ovan med begynnelsevärden $y(2) = 2$, $y'(2) = 3$.

Lösning: a). Om y_1 och y_2 är lösningar till en linjär inhomogen ekvation, så är $(y_1 - y_2)$ en lösning till motsvarande homogena ekvationen. För att se det tydligt, beteckna $L[y] = (x-1)y'' - xy' + y$. Denna operator är linjär. Den inhomogena ekvationen kan skrivas om som $L[y](x) = f(x)$, och motsvarande homogena ekvationen blir $L[y](x) = 0$. Vi har $L[y_1 - y_2] = f - f = 0$.

På samma sätt, om y_1 är en lösning till en linjär inhomogen ekvation, och y_h är en lösning till motsvarande homogena ekvationen, så är $(y_1 - y_h)$ lösning till den inhomogena ekvationen.

I vårt exempel, $y_{h1}(x) = y_2 - y_1 = (1 + 2x) - (1 + x) = x$ är en lösning till den homogena ekvationen. Vidare, $y_p = y_1 - y_{h1} = 1$ är en lösning till den inhomogena ekvationen, och $y_{h2} = y_3 - y_p = e^x$ är en till lösning till den homogena ekvationen.

Vi beräknar Wronski determinanten $W[y_{h1}, y_{h2}](x) = (x-1)e^x$. Den är skilld från 0 eftersom $x > 1$ i vårt intervall.

Detta innebär att $y_{h1}(x) = x$ och $y_{h2} = e^x$ utgör en fundamental lösningsmängd, och den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är $y(x) = c_1x + c_2e^x$ där c_1 och c_2 är godtyckliga konstanter.

b). Från a). följer att alla lösningar till den inhomogena ekvationen har form $y(x) = c_1x + c_2e^x + 1$. Begynnelsevillkor ger: $2 = y(2) = 2c_1 + c_2e^2 + 1$, och $3 = y'(2) = c_1 + c_2e^2$.

Detta ger: $c_1 = -2$, $c_2 = 5e^{-2}$, och lösningen till begynnelsevärdesproblemet ovan är $y(x) = -2x + 5e^{-2}e^x + 1$.

5. Låt

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ t, & t \geq 1. \end{cases}$$

a). Bestäm Laplace-transformen $F(s)$ till $f(t)$. **2p.**

b). Lös begynnelsevärdesproblemet $y' + y = f(t)$, $y(0) = 1$. **2p.**

Lösning: a) Vi kan skriva $f(t) = u(t-1)t$ där $u(t)$ är Heavisides stegfunktion. Om vi låter $g(t) = t + 1$ kan vi skriva $f(t) = u(t-1)g(t-1)$. Funktionen $g(t)$ ha Laplacetransformen $G(S) = 1/s^2 + 1/s$. Här har vi använt formleln L20 i Beta. Använder vi nu formel L4 fås att

$$F(s) = e^{-s}G(s) = e^{-s}(1/s^2 + 1/s) = e^{-s}\frac{s+1}{s^2}.$$

b) Vi Laplacetransformerar ekvationen, och utnyttjar begynnelsevillkoret:

$$sY(s) - 1 + Y(s) = F(s)$$

vilket ger

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} + e^{-s}\frac{s+1}{s^2(s+1)} = \frac{1}{s+1} + \frac{e^{-s}}{s^2}.$$

Eftersom $\mathcal{L}^{-1}(1/(s+1)) = e^{-t}$ (enligt L21) och $\mathcal{L}^{-1}(1/s^2) = t$ (enligt L20) så får vi, om vi utnyttjar L4, att

$$y(t) = e^{-t} + u(t-1)(t-1).$$

6. Betrakta ekvationen

$$(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 0.$$

Bestäm två linjärt oberoende potensserielösningar kring $x = 0$. Ange ett öppet intervall där potensserielösningarna ovan säkert konvergerar.

Lösning: Vi börjar med att svara på den sista frågan. Ekvationen har standard form

$$y'' + \frac{4x}{x^2-1}y' + \frac{2}{x^2-1}y = 0.$$

Vi ser att origo är en ordinär punkt, och lösningen kan därför skrivas som potensserie kring $x = 0$. Vidare, eftersom koefficienterna vid y' och y är analytiska för $|x| < 1$, så konvergerar potensserielösningen för alla $|x| < 1$.

Vi söker lösningen på formen $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Deriverar termvis:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}; \quad xy'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n,$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n,$$

och $x^2y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n$. Sätter in i ekvationen:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + 4\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Jämför koefficienter vid samma grad av x:
$n = 0$: $-2a_2 + 2a_0 = 0 \Leftrightarrow a_2 = a_0$.
$n = 1$: $-2 \cdot 3a_3 + 4a_1 + 2a_1 = 0 \Leftrightarrow a_3 = a_1$.
$n \geq 2$: $n(n-1)a_n - (n+2)(n+1)a_{n+2} + 4na_n + 2a_n = 0 \Leftrightarrow a_{n+2} = a_n$.
Alltså, $a_0 = a_{2n}$ och $a_1 = a_{2n+1}$ för alla $n \geq 0$. Vi får lösningar:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}$$

Lösningarna $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ och $y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}$ är linjärt oberoende (utgör en fundamental lösningsmängd) eftersom $W[y_1, y_2](0) = 1 \neq 0$.

Observera att lösningarna konvergerar för $|x| < 1$ och divergerar för $|x| \geq 1$. Inom konvergensintervallet kan man skriva om serielösningarna ovan som

$$y_1(x) = \frac{1}{1-x^2}, \quad y_2 = \frac{x}{1-x^2}.$$

7. Avgör om den kritiska punkten $(0,0)$ för systemet nedan är asymptotiskt stabil, stabil men inte asymptotiskt stabil, eller instabil:

$$\begin{cases} x' = -2xy^2 - x^3 \\ y' = -y + x^2 y. \end{cases}$$

Tips: Använd en Lyapunovfunktion på formen $V(x,y) = ax^2 + y^2$.

Lösning: För alla $a > 0$ är funktionen $V(x,y) = ax^2 + y^2$ positivt definit. Låt $(x(t), y(t))$ vara en lösning till systemet ovan. Då

$$\frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) = V'_x(x,y)x' + V'_y(x,y)y' =$$
$$2ax(-2xy^2 - x^3) + 2y(-y + x^2 y) = 2x^2y^2(1-2a) - 2ax^4 - 2y^2.$$

Om vi väljer $a = 1/2$, så är det sista uttrycket strikt negativ för alla $(x,y) \neq (0,0)$ och lika med 0 i origo. Enligt Lyapunovs sats, är kritiska punkten $(0,0)$ asymptotiskt stabil.

8. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska. Fullständig motivering krävs! Varje korrekt delsvar ger 1p.
a). Det finns ett öppet intervall I, innehållande 0, sådant att begynnelsevärdesproblemet $\frac{d\phi}{dt} = \phi^{1/3}$, $\phi(0) = 0$ har en unik lösning på I.

Lösning: Falskt. En lösning till begynnelsevärdesproblemet ovan ges av $\phi(t) = 0$ för alla $t \in \mathbb{R}$. En till lösning kan man få mha separation av variabler: man får $\phi(t) = (\frac{2}{3}t)^{3/2}$ för $t > 0$. Man kan verifiera att följande funktion är kontinuerligt deriverbar för $x \in \mathbb{R}$, och är alltså en lösning till ekvationen ovan:

$$\phi(t) = \begin{cases} (\frac{2}{3}t)^{3/2}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

b). Det finns en unik lösning $y(t)$ till begynnelsevärdesproblemet

$$y''(t) + \sin(t)y'(t) + \cos(t)y(t) = 0, \quad y(0) = 1$$

definierad för alla t.

Lösning: Falskt, det finns många sådana lösningar. Vi har en andra ordningens linjär ekvation, vars koefficienter är kontinuerliga på $\mathbb{R}$. För varje val av värden A och B finns det en unik lösning till ekvationen som uppfyller $y(0) = A$ och $y'(0) = B$. Speciellt, finns det (olika) lösningar $y_1(t)$ och $y_2(t)$ som uppfyller $y_1(0) = y_2(0) = 1$, $y_1'(0) = 1$ och $y_2'(0) = 2$.

c). Låt $f(y)$ vara en kontinuerligt deriverbar funktion. En lösning $y = \phi(t)$ till ekvationen

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

kan inte ha en sträng lokal maximipunkt (dvs en sådan punkt t_0 att $\phi(t) < \phi(t_0)$ för alla t tillräckligt nära t_0, $t \neq t_0$).

Lösning: Sant. Antag att en lösning $\phi(t)$ antar strängt lokalt maximum i punkten t_0. Då $\phi'(t_0) = 0$. Men då $f(\phi(t_0)) = 0$ (dvs $y = \phi(t_0)$ är en kritisk punkt till ekvationen), och ekvationen har en konstant lösning: $\psi(t) = \phi(t_0)$ för alla t. Vi har fått två lösningar, $\phi(t)$ och $\psi(t)$, som uppfyller samma begynnelsevillkoret $\phi(t_0) = \psi(t_0)$. Dessa lösningar kan inte sammanfalla eftersom $\phi(t)$ antar strängt lokalt maximum, och $\psi(t)$ är konstant.

Men eftersom $f(y)$ är kontinuerligt deriverbar, så måste varje begynnelsevärdesproblem ha en unik lösning, och vi kommer till motsägelse.

d). Låt $g(t)$ vara en kontinuerlig funktion. Om $y_1(t)$ och $y_2(t)$ är två lösningar till ekvationen

$$\frac{dy}{dt} = g(t)y(t),$$

(definierade på $\mathbb{R}$), och om $y_1(t)$ inte är identiskt lika med noll, så finns det en konstant c sådan att $y_2(t) = cy_1(t)$ för alla $t \in \mathbb{R}$.

Lösning: Sant. Eftersom $y_1(t)$ inte är identiskt lika med noll, så finns det t_0 sådan att $y(t_0) \neq 0$. Låt $c = y_2(t_0)/y_1(t_0)$, och betrakta $z(t) = cy_1(t)$. Eftersom ekvationen är linjär, så är $z(t)$ en lösning. Vidare, eftersom $g(t)$ är kontinuerlig, så motsvarar varje begynnelsevärde en unik lösning. Observera att $z(t_0) = cy_1(t_0) = y_2(t_0)$. Entydighetssatsen medför $cy_1(t) = z(t) = y_2(t)$ för alla $t \in \mathbb{R}$.