KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Bedömningskriterier till tentamen
Tisdagen den 7 juni 2016

Allmänt gäller följande:

- För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.
- Om lösningen helt saknar förklarande text, eller motsvarande förklaring i form av logiska symboler, till beräkningar och formler ges högst två poäng. Detta markeras vid bedömningen med FTS (Förklarande text saknas).
- Om lösningen har förklarande text men inte tillräckligt för att det ska gå att förstå alla steg ges högst tre poäng sammanlagt på uppgiften. Detta markeras med FLFT (För lite förklarande text).
- Mindre räknefel ger i allmänhet inte avdrag om de inte ändrar uppgiftens karaktär eller leder till orimligheter som borde ha upptäckts.
- Lösningen ska kunna läsas av en person som inte är insatt i problemet i förväg. Bevisbördan ligger på den som skriver, inte på den som läser.

(1) Låt S vara ellipsoiden som ges av ekvationen $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 5$.
(a) Bestäm en normalvektor till S i en punkt (x_0, y_0, z_0) på S. **(2 p)**
(b) Bestäm de värden på konstanten d för vilka planet $x+2y+6z = d$ är ett tangentplan till S. **(2 p)**

Bedömning:

(a)
- Korrekta metod för att bestämma en normalvektor, **1 poäng**
- Korrekta partiella derivator, **1 poäng**

(b)
- Korrekta bestämda tangeringspunkter, **1 poäng**
- Korrekt slutförd bestämning av d, **1 poäng**

---

(2) Låt $\mathbf{F}$ vara vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + 2z, x + 3z, 2x + 3y)$ och låt C vara den räta linjen från $(1, 1, 1)$ till $(3, 3, 3)$.
(a) Beräkna kurvintegralen $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ genom att använda en parametrisering av kurvan C. **(2 p)**
(b) Visa att $\mathbf{F}$ är konservativt och beräkna samma kurvintegral med hjälp av en potential. **(2 p)**

Bedömning:

(a)
- Korrekt metod för beräkna kurvintegral inklusive korrekt , **1 poäng**
- Korrekt slutförd beräkning av kurvintegralen, **1 poäng**

(b)
- Korrekt bestämd potential, **1 poäng**
- Korrekt användning av potentialen för att beräkna kurvintegralen, **1 poäng**

---

(3) Låt $f(x, y) = \sqrt{\cos(y) + \ln(1 + x)}$ för de x och y där detta uttryck är väldefinierat. Bestäm konstanterna a, b och c så att

$$f(x, y) = a + bx + cy + O(x^2 + y^2).$$

Detta betyder att det finns en konstant M sådan att

$$|f(x, y) - (a + bx + cy)| \leq M(x^2 + y^2)$$

för alla punkter (x, y) i en omgivning av origo. **(4 p)**

Konstanterna ges av $a = 1$, $b = 1/2$ och $c = 0$.

Bedömning:

- Korrekt idé att $a + bx + cy$ är första ordningens Taylorpolynom i origo, **1 poäng**.
- Korrekt beräkning av konstantterm, **1 poäng**.
- Korrekt beräkning av en av de linjära termerna, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av alla tre konstanter, **1 poäng**.

---

(4) En partikel färdas i en bana som beskrivs av parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = (\cos \pi t + \sin \pi t, \cos \pi t - \sin \pi t, \pi t), \qquad 0 \leq t \leq 4.$$

(a) Beräkna partikelns hastighet, $\mathbf{r}'(t)$, och acceleration, $\mathbf{r}''(t)$. **(1 p)**
(b) Visa att hastigheten och accelerationen är vinkelräta mot varandra. **(1 p)**
(c) Beräkna sträckan som partikeln har färdats under intervallet $0 \leq t \leq 4$. **(2 p)**

Bedömning:

(a) • Korrekt beräkning av hastighet och acceleration, **1 poäng**
(b) • Korrekt motivering till att hastighet och acceleration är vinkelräta, **1 poäng**
(c) • Korrekt beräkning av farten, **1 poäng**
• Korrekt slutförd beräkning av båglängden, **1 poäng**

---

(5) Området D i planet ges av

$$(x^2 + y^2 - x)^2 \leq x^2 + y^2$$

villket i polära koordinater motsvaras av olikheten $r \leq 1 + \cos\theta$. Bestäm koordinaterna till masscentret av området D om dess densitet är konstant. **(4 p)**

Bedömning:

- Korrekt formel för beräkning av masscentrum, **1 poäng**
- Korrekt beräkning av arean, **1 poäng**
- Korrekt beräkning av I_x, **1 poäng**
- Korrekt beräkning av I_y, **1 poäng**

---

(6) Vektorfältet $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ är definierat i rummet och uppfyller $\mathbf{div}\,\mathbf{F} = x^2 + y^2 + z^2$. Vi känner dessutom till att

$$F_3(x, y, z) = y^2 + xz.$$

Ytan S är övre halvan av enhetssfären som beskrivs av $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, och dess orientering ges av att normalvektorn $\mathbf{N} = (x, y, z)$ har positiv riktning. Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ genom S. **(4 p)**

Bedömning:

- Korrekt använding av divergenssatsen, **1 poäng**
- Korrekt beräkning av flödet ut ur halvklotet, **1 poäng**
- Korrekt beräkning av flödet ned genom enhetscirkeln, **1 poäng**
- Korrekt motiverad slutsats om flödet genom den buktiga delen av ytan, **1 poäng**

---

(7) Låt $f(x, y, z)$ vara en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion av variablerna x, y och z som endast beror på avståndet från origo. Det vill säga $f(x, y, z) = g(r)$ för någon två gånger deriverbar funktion $g(r)$, där $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Laplaceoperatorn ∇^2 definieras av att

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Beräkna $\nabla^2 f$ uttryckt i r, funktionen $g(r)$ och dess derivator, för $r > 0$. **(4 p)**

Bedömning:

- Korrekt användning av kedjeregeln i första steget, **1 poäng**
- Korrekt beräkning av $\partial r/\partial x$, **1 poäng**
- Korrekt beräkning av $\partial^2 f/\partial x^2$, **1 poäng**
- Korrekt slutförd beräkning av $\nabla^2 f$, **1 poäng**

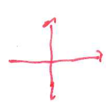
---

(8) Visa att ekvationen $4x^2 + 3y^2 + \cos(2x^2 + y^2) = 1$ endast har lösningen $(x, y) = (0, 0)$. **(4 p)**

Preliminär bedömning:

- Korrekt idé att origo är minimum för vänsterledet, **1 poäng**
- Korrekt bevis för att minimum är enda stationära punkten för vänserledet, **1 poäng**
- Korrekt hantering av beteendet långt från origo, **1 poäng**
- Korrekt slutförd motivering till att origo är enda lösningen till ekvationen, **1 poäng**

Slutgiltig bedömning:

- $\nabla f = 0 \Rightarrow (x,y) = (0,0)$ enda lösning 0p
- $\underbrace{\nabla f = 0 + \text{undersökning } (0,0)}$ + endastationära pkt 2p
- kolla $\lim_{(x,y)\to\pm\infty} f \overset{1p}{=} \infty$ ingen extra poäng
- ex.: $f(x,y) = x^2(1+y)^3 + y^2$
- deriverings fel −1p
-  riktningsderivatan 2p resterande poäng

Uppgift 8

(9) Låt $u(x, y)$ vara en *harmonisk funktion*, d.v.s. en funktion som uppfyller

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \text{för alla } x, y.$$

(a) Ange en kurvintegral som beräknar medelvärdet $v(r)$ av $u(x, y)$ över alla punkter (x, y) som ligger på en cirkel med radie r kring origo. **(1 p)**

(b) Det går att beräkna derivatan $v'(r)$ genom att derivera innanför integraltecknet. Visa att $v(r)$ är en konstant funktion genom att använda divergenssatsen på kurvintegralen för $v'(r)$. **(2 p)**

(c) Använd detta till att visa att $v(r) = u(0, 0)$ för alla $r > 0$. **(1 p)**

Bedömning:

(a)
- Korrekt uppställd kurvintegral för beräkning av medelvärdet, **1 poäng**

(b)
- Korrekt användning av divergenssatsen för omskrivning av $v'(r)$ som dubbelintegral , **1 poäng**
- Korrekt motiverad slutsats om att $v(r)$ är konstant, **1 poäng**

(c)
- Korrekt motivering till att $v(r) = u(0, 0)$, **1 poäng**
