SF1624 Algebra och geometri

Föreläsning 2

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

2 november 2016

Dagens ämne:

Skalärprodukt, kapitel 1.3-1.4 i boken

- Definition, skalärprodukt på två sätt
- Vinklar mellan vektorer
- Norm
- Plan och hyperplan och deras ekvationer
- Ortogonalitet
- Projektioner
- Beräkning av avstånd

Inledande exempel

Vardagsexempel:

1. Chimaira drar en resväska. Hur stort arbete utför hon?
2. Chimron gick från vägen in i skogen för att plocka svamp. Nu ska han tillbaka. Vilken punkt på vägen är närmast?

Skalärprodukt

Skalärprodukt i $\mathbf{R}^2$:

Om $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ och $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ så definieras skalärprodukten

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

Med hjälp av cosinussatsen kan man visa att

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos\theta$$

där θ är vinkeln mellan vektorerna. En följd av detta sista är att

$$\cos\theta = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$$

Skalärprodukt

Skalärprodukt i $\mathbf{R}^3$:

Om $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ och $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ så definieras skalärprodukten

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

Med hjälp av cosinussatsen kan man visa att

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \theta$$

där θ är vinkeln mellan vektorerna. En följd av detta sista är att

$$\cos \theta = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$$

Skalärprodukt

Uppgifter:

1. Låt $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$. Beräkna skalärprodukten $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
Är vinkeln mellan $\vec{u}$ och $\vec{v}$ spetsig eller trubbig?

2. Låt $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ och $\vec{z} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Beräkna skalärprodukten $\vec{w} \cdot \vec{z}$.
Vad kan du säga om vinkeln mellan $\vec{w}$ och $\vec{z}$?

Skalärprodukt i $\mathbf{R}^n$:

Om $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ och $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ så definieras skalärprodukten

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

Sats. Om $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbf{R}^n$ och $t \in \mathbf{R}$ så gäller:

1. $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$ och dessutom gäller att $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$
2. $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$
3. $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$
4. $(t\vec{x}) \cdot \vec{y} = t(\vec{x} \cdot \vec{y}) = \vec{x} \cdot (t\vec{y})$

Norm av en vektor:

Om $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ så definierar vi normen $\|\vec{x}\|$ genom

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

Sats. Om $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ och $t \in \mathbf{R}$ så gäller:

1. $\|\vec{x}\| \geq 0$ och dessutom gäller att $\|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$
2. $\|t\vec{x}\| = |t|\|\vec{x}\|$
3. $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$ (Cauchy-Schwartz)
4. $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (Triangelolikheten)

Definition.

Om $\|\vec{x}\| = 1$, så kallas $\vec{x}$ en **enhetsvektor.**

Definition.

Om $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$, så sägs $\vec{x}$ och $\vec{y}$ vara **ortogonala.**

Definition.

Om $\vec{x} = t\vec{y}$, för något $t \neq 0$, så sägs $\vec{x}$ och $\vec{y}$ vara **parallella.**

Observation.

$\vec{0}$ är ortogonal mot alla vektorer
$\vec{0}$ är inte parallell med någon vektor (utom sig själv).

Plan i $\mathbf{R}^3$.

Vi har tidigare sett att ett plan i $\mathbf{R}^3$ kan skrivas på vektorform/parameterform genom

$$\vec{x} = \vec{p} + t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2, \qquad t_1, t_2 \in \mathbf{R}$$

Ofta är det bättre att ange plan på standardform, dvs med en skalärekvation. Planet genom punkten $P(p_1, p_2, p_3)$ med normalvektor $\vec{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$ ges av

$$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$$

eller ekvivalent

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d, \qquad \text{där } d = n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3$$

Liten övning

Uppgifter.

1. Bestäm en ekvation på standardform för det plan som går genom punkten $P(1,0,0)$ och har normalvektor $n = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$
2. Bestäm en normalvektor för det plan som beskrivs av ekvationen $z = 2x + 3y + 1$.
3. Avgör om punkten $P(0,5,-2)$ ligger i planet med ekvation $x + 2y + z = 8$

Projektioner i $\mathbf{R}^n$

Projektionen av vektorn $\vec{u}$ på vektorn $\vec{v}$ är

$$\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$$

Övningar:

1. Bestäm projektionen av vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ på vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Rita figur!

2. Bestäm projektionen av vektorn $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ på vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Rita figur!

Perpendikulär del

Perpendikulära projektioner i $\mathbf{R}^n$

Projektionen av vektorn $\vec{u}$ perpendikulärt mot vektorn $\vec{v}$ är

$$\mathrm{perp}_{\vec{v}}\vec{u} = \vec{u} - \mathrm{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$$

Övningar:

1. Bestäm projektionen av $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ perpendikulärt mot $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$.

Rita figur!

2. Låt $\vec{w} = \begin{bmatrix}4\\2\\5\end{bmatrix}$ och $\vec{z} = \begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$. Skriv $\vec{w}$ som en summa av två vektorer, där en är parallell med $\vec{z}$ och en är ortogonal mot $\vec{z}$

Nu kan vi beräkna diverse avstånd. Exempel:

1. Beräkna avståndet från punkten $P(4,3)$ till linjen L som ges av $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Rita figur!

2. Beräkna avståndet från punkten $P(1,2,5)$ till planet med ekvation $2x + y - 2z = 10$. Vilken punkt på planet är närmast punkten P? Glöm inte att rita figur!

Läxa till nästa gång

Liten läxa:

1. Se en film på scalable om kryssprodukt.

2. Räkna en hel del övningsuppgifter från kap 1.1-1.4

3. När du har gjort övningsuppgifterna i boken:
   Lös följande uppgifter till Seminarium1: nr 1 samt 2ab.