

SF1624 Algebra och geometri

Föreläsning 1

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

31 oktober 2016

**Välkommen till kursen SF1624 Algebra och geometri,
CELTE och CMETE och COPEN!**

Lars Filipsson, kursansvarig
LFN@KTH.SE

Idag ska vi se hur kursen funkar samt börja jobba.

Första uppgiften i kursen: **vektorer**

Administrativt för SF1624 Algebra och geometri:

- Info på Kurswebben i KTH Social
- Filmer i Scalable learning
- Registrera dig på kursen (nu!)
- Anmäl dig till tentamen (senare)

Läs på kurswebben för SF1624 i KTH Social:

- Kursregistrering
- Seminarier (hitta din resultatsida)
- Kurslitteratur och kursinnehåll
- Elektro Media Open

Så här jobbar ni med kursen:

- Före föreläsning: ni ser film och läser i boken
- På föreläsning: genomgångar och uppgifter
- Efter föreläsning: ni läser och löser uppgifter
- På övning: arbete med uppgifter ur boken
- Efter övning: ni läser och löser uppgifter
- Före seminarium: ni löser uppgifter
- På seminarium: inl./prov, problemlösning, presentation

Vad handlar den här kursen om? Linjär algebra:

- Vektorer, Matriser, Determinanter
- Geometri med linjer och plan
- Linjära ekvationssystem
- Linjära avbildningar mellan vektorrum
- Egenvärden och egenvektorer, diagonalisering

Översikt över modul 1

- Idag: Vektorer (kap 1.1-1.2)
 - Räkna med vektorer i \mathbf{R}^n
 - Linjens ekvation på vektorform/parameterform
 - Längden (normen) av en vektor
 - Enhetsvektorer
- På onsdag: Skalärprodukt av vektorer (kap 1.3-1.4)
 - Definition och egenskaper
 - Projektioner
 - Planets ekvation
 - Minsta avstånd
- På fredag: Kryssprodukt av vektorer
 - Definition och egenskaper
 - Volymer mm

Vektorer i \mathbf{R}^2 , \mathbf{R}^3 , och \mathbf{R}^n .

- Räkning med vektorer
 - addition
 - subtraktion
 - multiplikation med skalär
- Längden (normen) av en vektor, enhetsvektorer
- Linjens ekvation på vektorform/parameterform
- Standardbasen
- Linjärkombinationer av vektorer

Vardagsexempel:

1. Artilia, Bertilia och Certilia drar i en kälke.
 - A. Vad händer med kälken?
 - B. Hur ska Certilia dra för att det ska bli jämvikt?
2. Dertil åker eclipse på Gröna Lund. Hur ska tyngdkraften beskrivas?

Vektorer i \mathbf{R}^2

$$\mathbf{R}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbf{R} \right\}. \text{ Vektorbeteckning: } \vec{x}$$

Vektorerna i \mathbf{R}^2 kan adderas:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix}$$

och multipliceras med reella tal (skalärer):

$$t \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} tx_1 \\ tx_2 \end{bmatrix}$$

Längden (normen) av en vektor ges av

$$\left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Uppgift.

Låt $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ och $\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

- A. Beräkna $\vec{u} + \vec{v}$. Rita även figur!
- B. Beräkna $\vec{u} - \vec{v}$. Rita även figur!
- C. Beräkna $2\vec{u}$. Rita även figur!
- D. Beräkna $-\vec{v}$. Rita även figur!
- E. Beräkna $\|\vec{u}\|$ och bestäm en enhetsvektor parallell med \vec{u}
- F. Beräkna $\|\vec{v}\|$ och bestäm en enhetsvektor parallell med \vec{v}

Vi kan beskriva linjer i planet med vektorer:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}$$

är vektorformen/parameterformen för den linje som går genom punkten $P(1, -3)$ och är parallell med vektorn $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$. Om

$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ och $\vec{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ skriver vi också

$$\vec{x} = \vec{p} + t\vec{v}, \quad t \in \mathbf{R}$$

(I envarre hade vi skrivit $x_2 = 2x_1 - 5$ för denna linje)

Uppgifter.

1. Finn en ekvation på vektorform/parameterform för den räta linje som går genom punkten $P(0, -1)$ och är parallell med vektorn $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Avgör om punkten $Q(5, 9)$ ligger på linjen!
Rita figur!

2. Finn en ekvation på vektorform/parameterform för den räta linje som går genom punkterna $P(3, -1)$ och $Q(-1, 1)$. Rita figur!

Vektorer i \mathbf{R}^3

$$\mathbf{R}^3 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R} \right\}$$

Vektorerna i \mathbf{R}^3 kan adderas:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix}$$

och multipliceras med reella tal (skalärer):

$$t \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} tx_1 \\ tx_2 \\ tx_3 \end{bmatrix}$$

Längden (normen) av vektorn $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ ges av $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

Uppgift.

$$\text{Låt } \vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ och } \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- A. Beräkna $\vec{u} + \vec{v}$ och $\vec{u} - \vec{v}$. Rita nån sorts figur!
- B. Beräkna $-\vec{v}$. Rita nån sorts figur!
- C. Beräkna $\|\vec{u}\|$ och bestäm en enhetsvektor parallell med \vec{u}
- D. Beräkna $\|\vec{v}\|$ och bestäm en enhetsvektor parallell med \vec{v}

Vi kan beskriva linjer i rymden med vektorer:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}$$

är vektorformen/parameterformen för den linje som går genom punkten $P(1, -3, 2)$ och är parallell med vektorn $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$. Om

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ och } \vec{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ skriver vi också}$$

$$\vec{x} = \vec{p} + t\vec{v}, \quad t \in \mathbf{R}$$

$(x_3 = 2x_1 - x_2 - 5$ är INTE ekvationen för en linje! Vad är det?)

Uppgifter.

1. Finn en ekvation på vektorform/parameterform för den räta linje som går genom punkten $P(0, -1, 3)$ och är parallell med vektorn $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Avgör om punkten $Q(5, 8, 3)$ ligger på linjen!

2. Finn en ekvation på vektorform/parameterform för den räta linje som går genom punkterna $P(3, -1, 0)$ och $Q(-1, 1, 2)$. Rita figur! Kan man göra på mer än ett sätt?

Vektorer i \mathbf{R}^n

$$\mathbf{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R} \right\}$$

Vektorerna i \mathbf{R}^3 kan adderas och multipliceras med skalärer:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad t \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} tx_1 \\ tx_2 \\ \vdots \\ tx_n \end{bmatrix}$$

Normen av vektorn $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ är $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

Vektorrumsaxiomen

Följande regler gäller för alla $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ och $s, t \in \mathbf{R}$

1. $\vec{x} + \vec{y} \in \mathbf{R}^n$
2. $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
3. $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$
4. $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$
5. $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$
6. $t\vec{x} \in \mathbf{R}^n$
7. $s(t\vec{x}) = (st)\vec{x}$
8. $(s + t)\vec{x} = s\vec{x} + t\vec{x}$
9. $t(\vec{x} + \vec{y}) = t\vec{x} + t\vec{y}$
10. $1\vec{x} = \vec{x}$

Se sats 1 sid 15 i boken.

En icke-tom delmängd S av \mathbf{R}^n sägs vara ett **delrum** till \mathbf{R}^n om för alla vektorer $\vec{x}, \vec{y} \in S$ och skalärer $t \in \mathbf{R}$ gäller

1. $\vec{x} + \vec{y} \in S$
2. $t\vec{x} \in S$

$\{\vec{0}\}$ kallas det triviala delrummet.

En given mängd $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ av vektorer i \mathbf{R}^n **spänner upp** ett delrum S till \mathbf{R}^n genom

$$S = \{t_1 \vec{v}_1 + t_2 \vec{v}_2 + \dots + t_k \vec{v}_k : t_1, \dots, t_k \in \mathbf{R}\}$$

Dvs S är alla tänkbara linjärkombinationer av $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$.

Vi skriver $S = \text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$

Linjärt beroende/oberoende

En given mängd $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ av vektorer i \mathbf{R}^n sägs vara linjärt oberoende om ingen av dem kan skrivas som en linjärkombination av de övriga.

Ett annat sätt att säga samma sak:

Definition. En mängd $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ av vektorer i \mathbf{R}^n sägs vara **linjärt oberoende** om ekvationen

$$t_1 \vec{v}_1 + t_2 \vec{v}_2 + \dots + t_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

bara har den triviala lösningen $t_1 = t_2 = \dots = t_k = 0$.
Finns det någon icke-trivial lösning till ekvationen sägs mängden vektorer vara **linjärt beroende**.

Om en mängd $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ av vektorer i \mathbf{R}^n **spänner upp** ett delrum S till \mathbf{R}^n och dessutom är **linjärt oberoende** så sägs $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ vara en **bas** för S .

Obs standardbasen för \mathbf{R}^n är $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$

Linjer, plan och hyperplan

Linje i \mathbf{R}^n . Om $\vec{p}, \vec{v} \in \mathbf{R}^n$ med $\vec{v} \neq \vec{0}$ så sägs mängden av punkter \vec{x} som uppfyller vektorekvationen $\vec{x} = \vec{p} + t\vec{v}$, $t \in \mathbf{R}$, vara en **linje** genom \vec{p} .

Plan i \mathbf{R}^n . Om $\vec{p}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbf{R}^n$ med $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ en linjärt oberoende mängd, så sägs mängden av punkter \vec{x} som uppfyller vektorekvationen $\vec{x} = \vec{p} + t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2$, $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$, vara ett **plan** genom \vec{p} .

Hyperplan i \mathbf{R}^n . Om $\vec{p}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n-1} \in \mathbf{R}^n$ med $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n-1}\}$ en linjärt oberoende mängd, så sägs mängden av punkter \vec{x} som uppfyller vektorekvationen $\vec{x} = \vec{p} + t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2 + \dots + t_{n-1}\vec{v}_{n-1}$, $t_1, \dots, t_{n-1} \in \mathbf{R}$, vara ett **hyperplan** genom \vec{p} .

Liten läxa till nästa gång:

1. Se film om skalärprodukt på scalable
2. Titta på och tänk igenom figuren på sid 29 i boken
3. Träna på räkning med vektorer och linjer i \mathbf{R}^2 och \mathbf{R}^3
4. En båt som i stillastående vatten går med 6 m/s kommer in i en älv där vattnet rör sig med 2 m/s rakt söderut.
 - A. Bestäm båtens hastighet om den styrs i rakt östlig riktning!
 - B. Vilken kurs ska båten ges för att röra sig rakt österut?