DD1350 Logik för dataloger

Fö 9 – Matematisk induktion

Induktionsaxiomet

Tidigare: **Induktionsaxiomet** är ett av **Peanos axiom** i hans axiomatisering av de naturliga talen.

Men induktion blir också en kraftfull bevismetod för påståenden om heltal (och även andra mängder där det finns en naturlig **ordning** mellan elementen).

Axiomet: Om Φ är en formel med en fri variabel x, så:

$$\frac{\Phi[0/x] \qquad \boxed{\begin{array}{ll} k & \Phi[k/x] \\ & \quad\dots \\ & \Phi[k+1/x] \end{array}}}{\forall x\, \Phi}\ \text{IND}$$

Bevisstruktur (informellt)

Låt *P*(*x*) vara ett påstående om heltalet x, t.ex.

$$\sum_{i=0}^{x} i = \frac{x(x+1)}{2}$$

1. Bevisa först **basfallet** *P*(0).
2. **Induktionshypotesen:** Antag *P*(*k*) för ett godtyckligt *k*.
3. **Induktionssteget :** Visa *P*(*k*+1) med hjälp av hypotesen *P*(*k*).
4. Dra slutsatsen $\forall$x *P*(*x*).

Exempel

$$\sum_{i=0}^{x} i = \frac{x(x+1)}{2}$$

Basfall: 0 = 0(0+1/2) (trivialt).

Hypotes: Antag att 1+...+*k* = *k*(*k*+1)/2

enl hypotes

Induktionssteg: 1+...+*k* + (*k*+1) = *k*(*k*+1)/2 + (*k*+1) =

= (*k*(*k*+1) + 2(*k*+1))/2 =(*k*²+3*k*+2)/2 = (*k*+1)(*k*+2)/2

= (*k*+1)((*k*+1)+1)/2

Induktion i naturlig deduktion

Induktionsaxiomet kan användas tillsammans med de övriga axiomen i naturlig deduktion.

T.ex. Bevisa $\forall y\ (\ 0+y=y+0\ )$ direkt från två av axiomen för Peano-aritmetik:

$\forall x\ (\ x+0=x\ )$

$\forall x\ \forall y\ (\ x+(y+1)=(x+y)+1)$

	1.	$\forall x\ (\ x+0=x\ )$	Premiss
	2.	$\forall x\ \forall y\ (\ x+(y+1)=(x+y)+1)$	Premiss
	3.	x_0	
	4.	$x_0 + 0 = x_0$	Antagande
	5.	$x_0 + 0 = x_0 + 0$	=i
	6.	$x_0 = x_0 + 0$	=e 4,5
	7.	$\forall x\ (x = x+0\ )$	$\forall x$ i 3-6
Basfall →	8.	$0+0 = 0+0$	=i
	9.	y_0	
Induktions-hypotes →	10.	$0+y_0 = y_0+0$	Antagande
	11.	$0+(y_0+1) = 0+(y_0+1)$	=i
	12.	$\forall y\ (\ 0+(y+1)=(0+y)+1)$	$\forall x$ e 2
	13.	$0+(y_0+1)=(0+y_0)+1$	$\forall y$ e 2
Här används induktions-hypotesen →	14.	$0+(y_0+1)=(y_0+0)+1$	=e 10,13
	15.	$y_0+0 = y_0$	$\forall x$ e 1
	16.	$0+(y_0+1)=y_0+1$	=e 15,14
	17.	$y_0+1 = (y_0+1)+0$	$\forall x$ e 7
	18.	$0+(y_0+1)=(y_0+1)+0$	=e 17,16
	19.	$\forall y\ (\ 0+y = y+0\ )$	IND 8, 9-18

Stark induktion

Principen för stark induktion:

1. Bevisa först **basfallet** $P(0)$.
2. **Induktionshypotesen:** Antag $P(k)$ <u>för alla $0 \leq k < n$</u>.
3. **Induktionssteget :** Visa $P(n)$ med hjälp av hypoteserna $P(0),..., P(n-1)$.
4. Dra slutsatsen $\forall x\ P(x)$.

Exempel på stark induktion

Visa att alla tal ≥ 2 kan skrivas som en produkt av primtal.

Låt $P(x)$: $x = p_1 p_2 ... p_k$ där alla p_i är primtal

Basfall: $P(2)$ trivialt sann eftersom 2 är ett primtal.

Ind. hypotes: Antag $P(k)$ sann för alla $k<n$.

Ind. steg: Betrakta *n.* <u>Antingen</u> är n ett primtal (och $P(n)$ trivialt sann), <u>eller</u> också är $n=ab$, där både a och b är ≥ 2. Enligt hypotesen kan både a och b skrivas som produkter av primtal, och därmed även *n.*

(*Notera att det inte är uppenbart hur den ”vanliga” induktionsprincipen ska användas i detta fall.)*

Flera basfall

Ibland kan flera basfall behövas. T.ex.:

Visa att varje tal $n > 23$ kan skrivas på formen $7x+5y$.

Basfall: $24 = 7{\cdot}2 + 5{\cdot}2$, $25 = 7{\cdot}0 + 5{\cdot}5$, $26 = 7{\cdot}3 + 5{\cdot}1$,
$27 = 7{\cdot}1 + 5{\cdot}4$, $28 = 7{\cdot}4 + 5{\cdot}0$

Ind.hypotes: Antag att varje k, $23<k<n$ kan skrivas som $7x+5y$, för några x,y.

Ind. steg: (för $n>28$): Enligt hypotesen kan $n–5$ skrivas som $7x+5y$. Då kan n skrivas som $7x+5(y+1)$.

Stark induktion och vanlig induktion

Stark induktion kan överföras till vanlig induktion:

Låt $Q(n)$ beteckna $P(0) \wedge ... \wedge P(n)$.

Då är $Q(0) = P(0)$, dvs bassteget är likadant för Q och P.

Induktionssteget i stark induktion:

$P(0) \wedge ... \wedge P(n) \rightarrow P(n+1)$ dvs

$Q(n) \rightarrow P(n+1)$ vilket är ekvivalent med

$Q(n) \rightarrow Q(n) \wedge P(n+1)$ dvs

$Q(n) \rightarrow Q(n+1)$

dvs stark induktion i P kan skrivas som vanlig induktion i Q.