DD1361
Programmeringsparadigm

Formella Språk & Syntaxanalys
Föreläsning 2

Per Austrin

2016-11-03

Snabb repetition

Tre huvudkoncept förra gången:

Formellt språk

- en mängd strängar
- t.ex. “obligatoriska progp-labbarna”, “binära strängar med udda antal ettor”, “syntaktiskt korrekta java-program”

Reguljärt uttryck

- ett “verktyg” för att beskriva ett formellt språk
- i praktiken: *regex*, har extra funktionalitet som t.ex. *bakåtreferenser* (skilj på “regex” och “reguljära uttryck”!)

Ändlig automat, DFA

- en abstrakt “maskin” för att beskriva ett formellt språk,
- en sorts algoritm för att *känna igen* ett formellt språk

Idag

Reguljära uttryck vs automater

Reguljära språk, begränsningar

Grammatiker

Idag

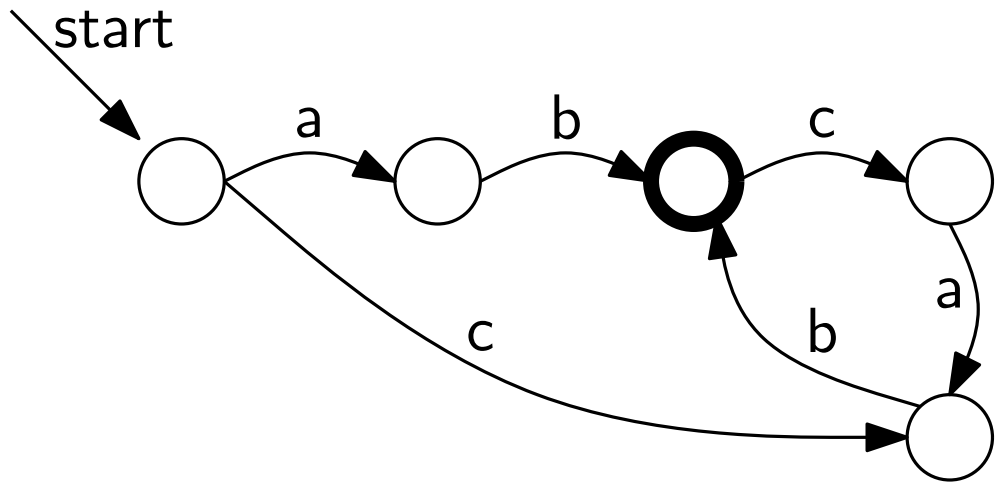
Reguljära uttryck vs automater

Reguljära språk, begränsningar

Grammatiker

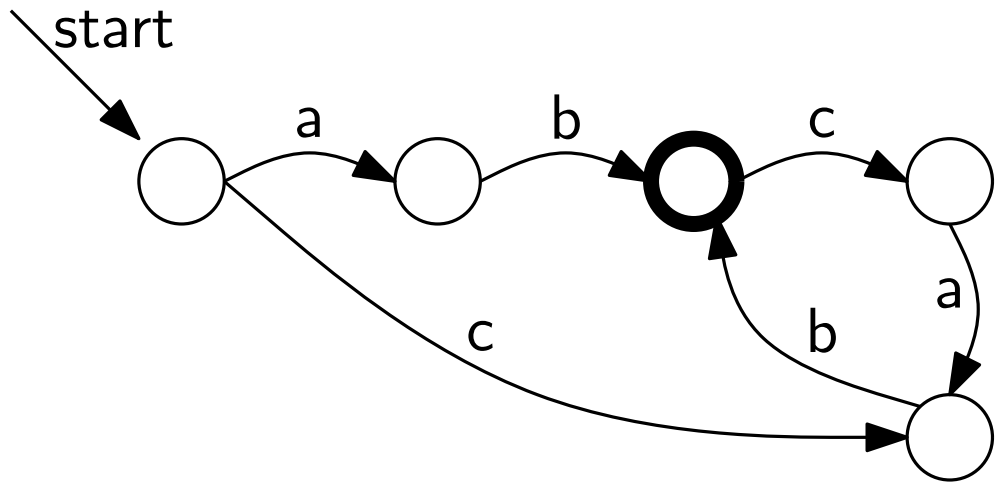
Automat till reguljärt uttryck

Förra gången tittade vi på den här automaten



Automat till reguljärt uttryck

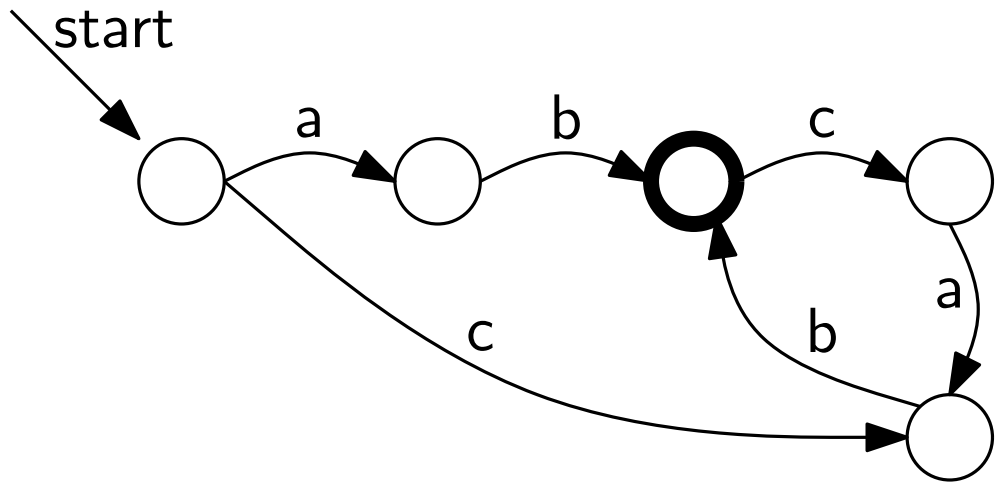
Förra gången tittade vi på den här automaten



Kan vi beskriva samma formella språk med ett reguljärt uttryck?

Automat till reguljärt uttryck

Förra gången tittade vi på den här automaten



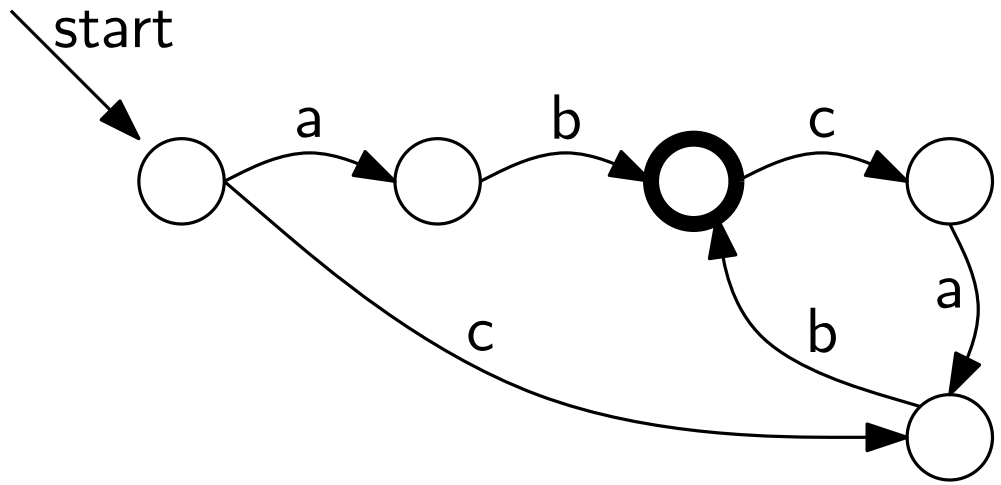
Kan vi beskriva samma formella språk med ett reguljärt uttryck?

Strängarna vi vill acceptera är:

1. Börja med antingen `ab` eller `cb` för att komma till accept-tillstånd
2. Sedan valfritt antal `cab` (varv i loopen)

Automat till reguljärt uttryck

Förra gången tittade vi på den här automaten



Kan vi beskriva samma formella språk med ett reguljärt uttryck?

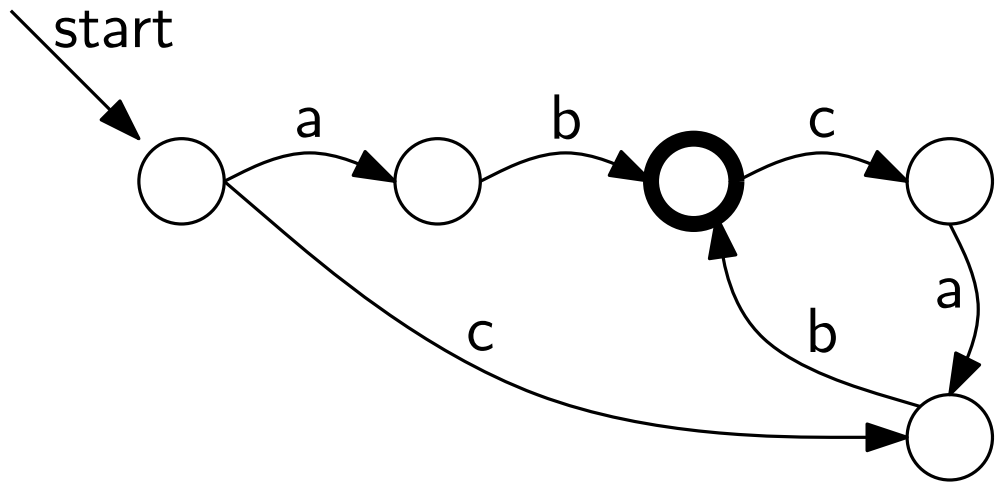
Strängarna vi vill acceptera är:

1. Börja med antingen `ab` eller `cb` för att komma till accept-tillstånd
2. Sedan valfritt antal `cab` (varv i loopen)

Reguljärt uttryck: `(ab|cb)(cab)*`

Automat till reguljärt uttryck

Förra gången tittade vi på den här automaten



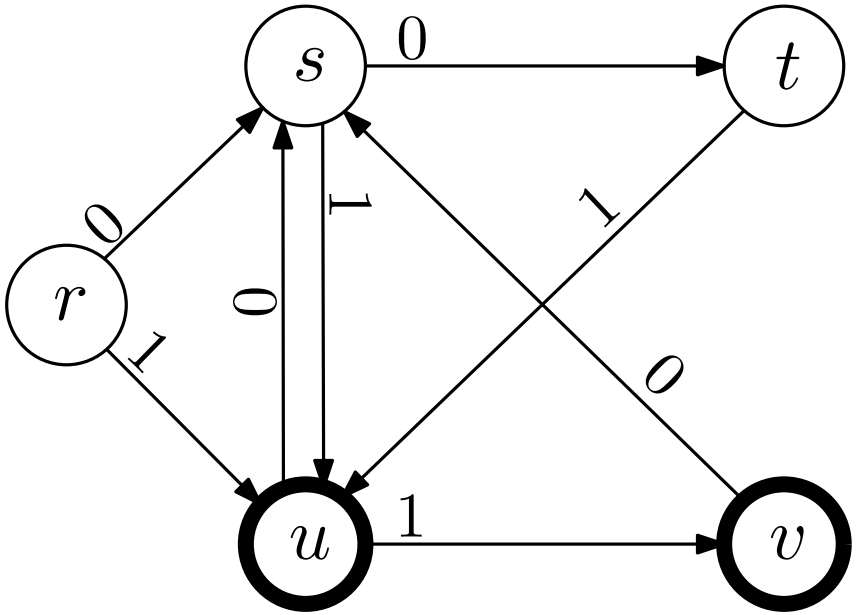
Kan vi beskriva samma formella språk med ett reguljärt uttryck?

Strängarna vi vill acceptera är:

1. Börja med antingen `ab` eller `cb` för att komma till accept-tillstånd
2. Sedan valfritt antal `cab` (varv i loopen)

Reguljärt uttryck: `(ab|cb)(cab)*`
Mer kompakt: `[ac]b(cab)*`

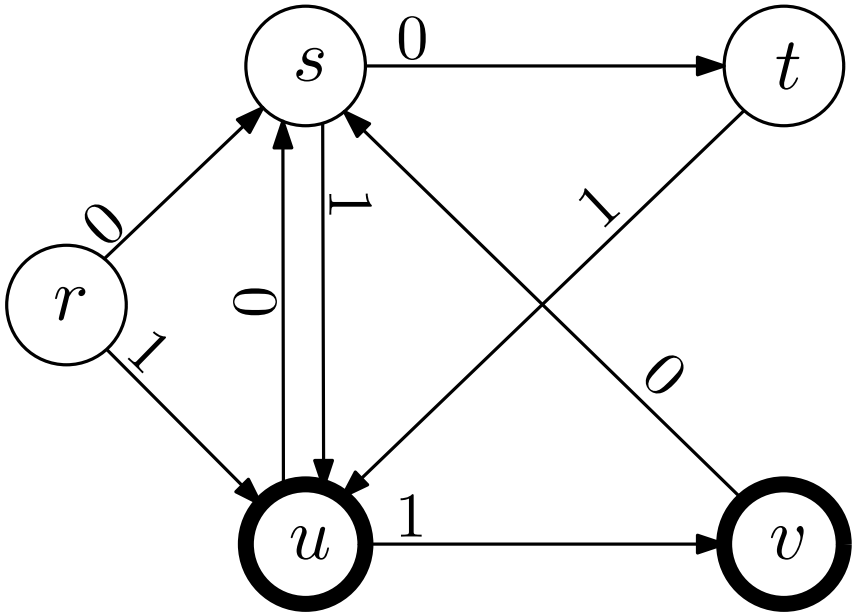
Från automater till reguljära uttryck



Starttillstånd r
Accepterande tillstånd u och v

Kan vi skriva ett reguljärt uttryck för den här automaten?

Från automater till reguljära uttryck

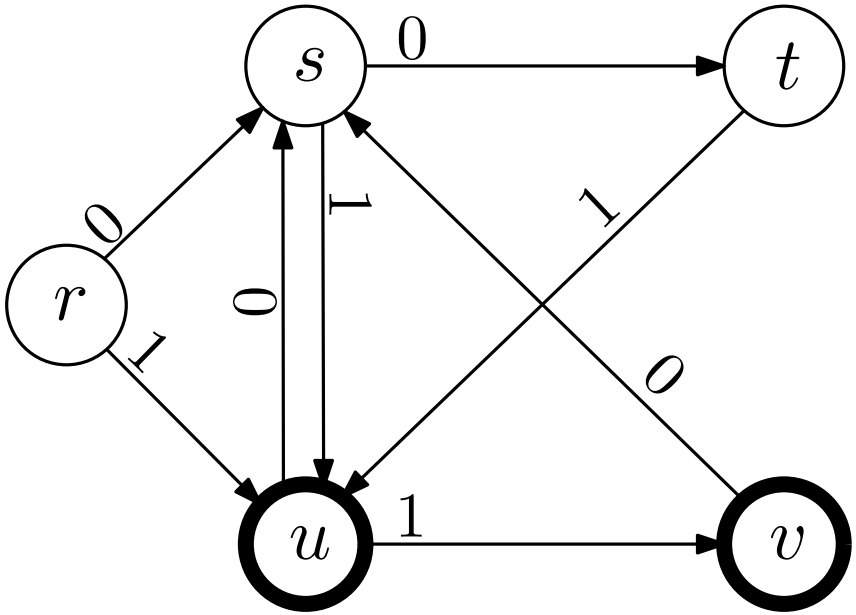


Starttillstånd r
Accepterande tillstånd u och v

Kan vi skriva ett reguljärt uttryck för den här automaten?

Steg 1: förstå vilka strängar som automaten känner igen

Från automater till reguljära uttryck



Starttillstånd r
Accepterande tillstånd u och v

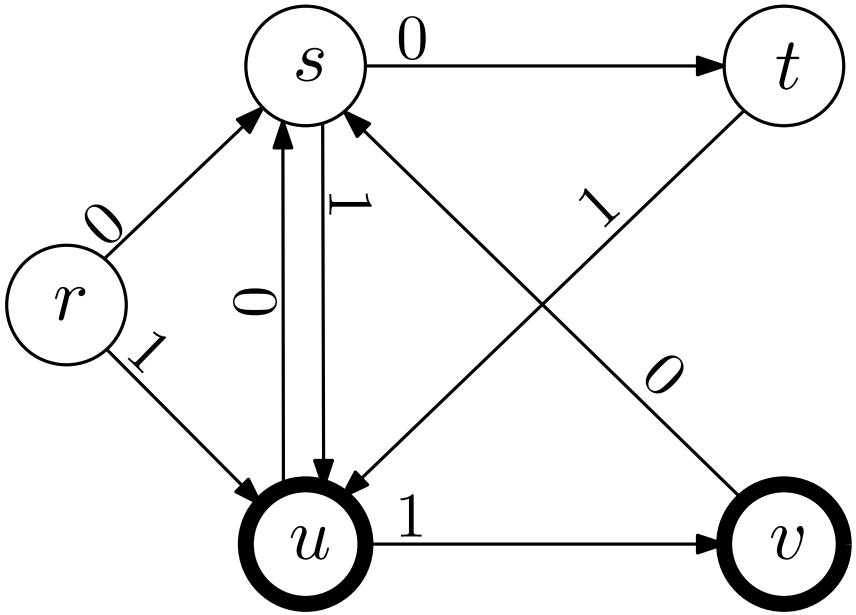
Kan vi skriva ett reguljärt uttryck för den här automaten?

Steg 1: förstå vilka strängar som automaten känner igen

Ungefärlig tankeprocess:

1. s och t kommer man bara till när man läst en nolla.
2. u och v kommer man bara till när man läst en etta
3. t resp. v kommer man bara till när man läst två nollor resp. ettor i rad, och får då inte läsa en tredje

Från automater till reguljära uttryck



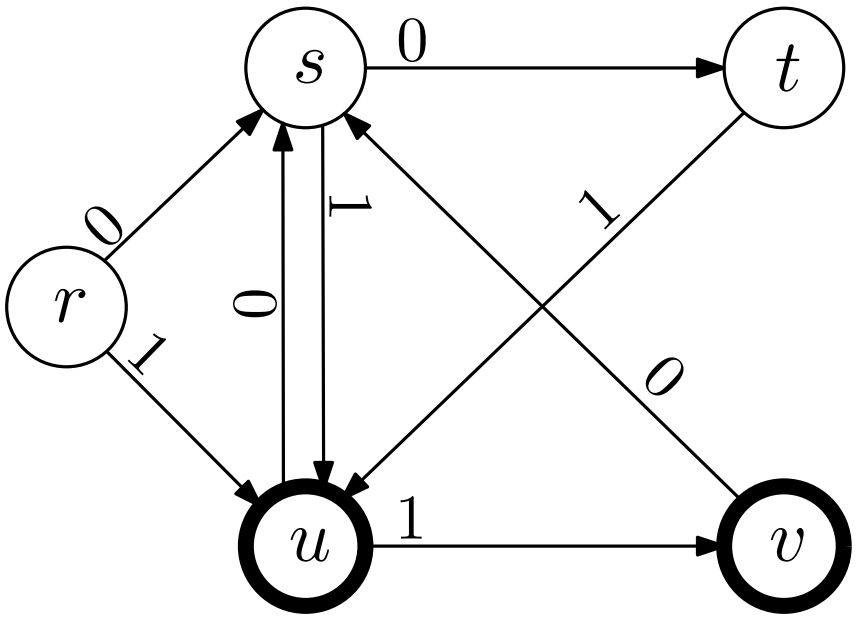
Starttillstånd r
Accepterande tillstånd u och v

Kan vi skriva ett reguljärt uttryck för den här automaten?

Steg 1: förstå vilka strängar som automaten känner igen

...alla strängar där det aldrig förekommer mer än två nollor/ettor i rad, och som slutar på en etta

Från automater till reguljära uttryck



Starttillstånd r
Accepterande tillstånd u och v

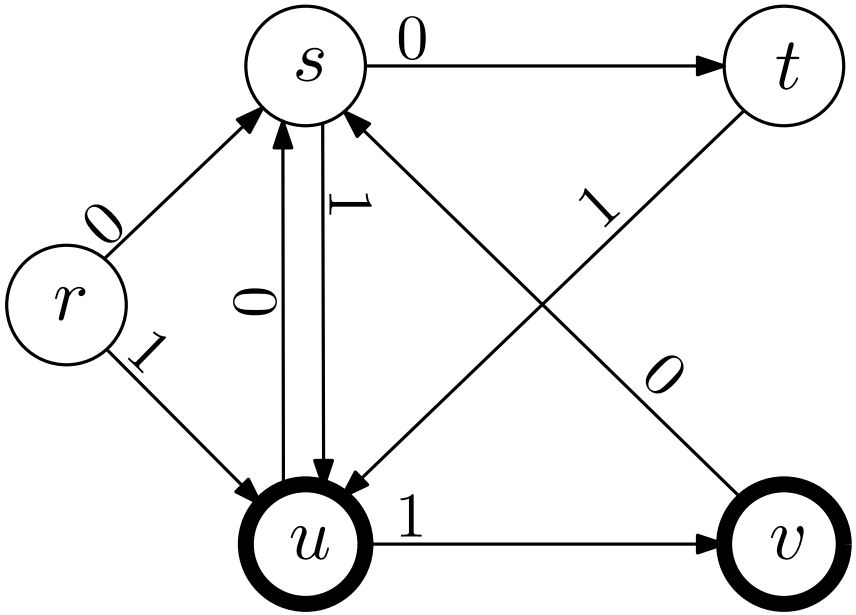
Kan vi skriva ett reguljärt uttryck för den här automaten?

Steg 1: förstå vilka strängar som automaten känner igen

...alla strängar där det aldrig förekommer mer än två nollor/ettor i rad, och som slutar på en etta

Steg 2, enklare variant: tillåt inte ens två nollor/ettor i rad

Från automater till reguljära uttryck



Starttillstånd r
Accepterande tillstånd u och v

Kan vi skriva ett reguljärt uttryck för den här automaten?

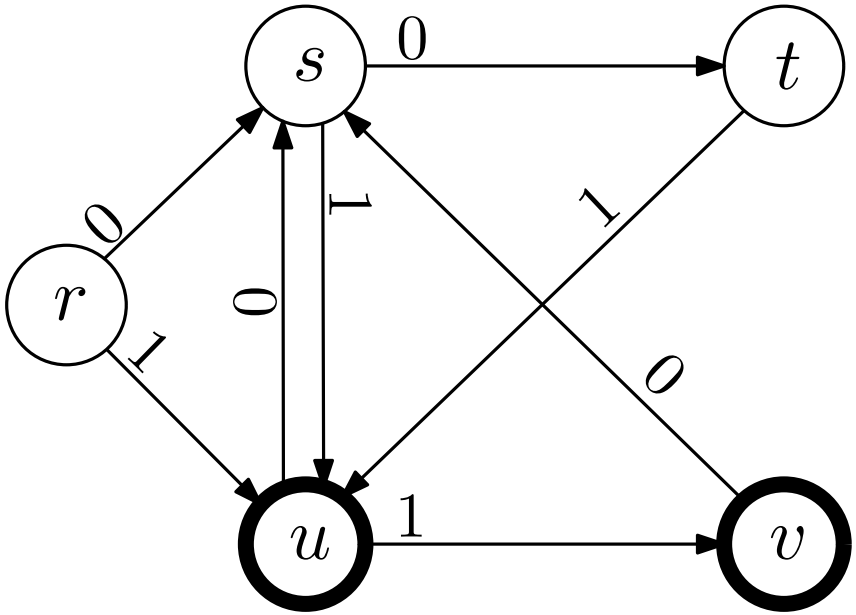
Steg 1: förstå vilka strängar som automaten känner igen

...alla strängar där det aldrig förekommer mer än två nollor/ettor i rad, och som slutar på en etta

Steg 2, enklare variant: tillåt inte ens två nollor/ettor i rad

`0?(10)*1`

Från automater till reguljära uttryck



Starttillstånd r
Accepterande tillstånd u och v

Kan vi skriva ett reguljärt uttryck för den här automaten?

Steg 1: förstå vilka strängar som automaten känner igen

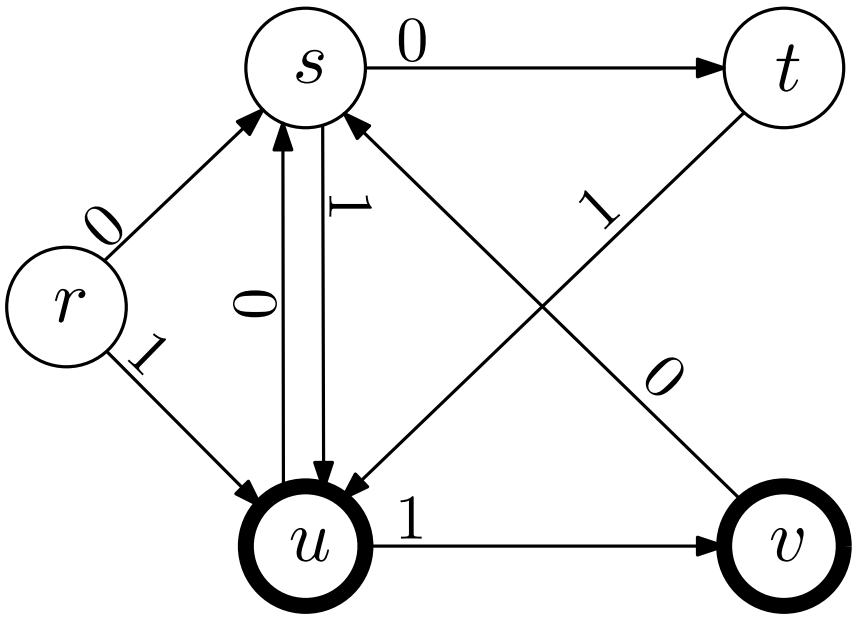
...alla strängar där det aldrig förekommer mer än två nollor/ettor i rad, och som slutar på en etta

Steg 2, enklare variant: tillåt inte ens två nollor/ettor i rad

`0?(10)*1`

Steg 3: tillåt varje tecken att upprepas en gång. Byt ut `0` mot `0?0` och liknande för `1`

Från automater till reguljära uttryck



Starttillstånd r
Accepterande tillstånd u och v

Kan vi skriva ett reguljärt uttryck för den här automaten?

Steg 1: förstå vilka strängar som automaten känner igen

...alla strängar där det aldrig förekommer mer än två nollor/ettor i rad, och som slutar på en etta

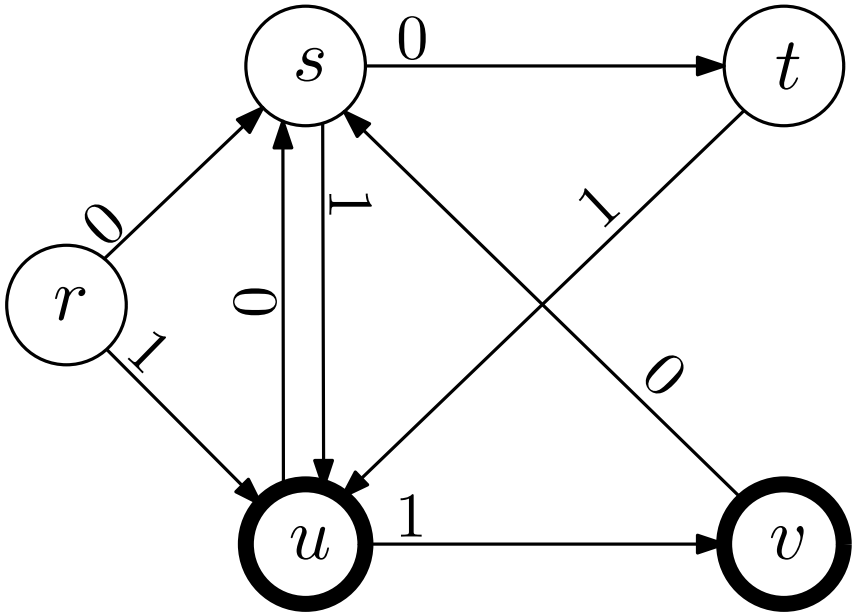
Steg 2, enklare variant: tillåt inte ens två nollor/ettor i rad

`0?(10)*1`

Steg 3: tillåt varje tecken att upprepas en gång. Byt ut 0 mot 0?0 och liknande för 1

`0?0?(1?10?0)*1?1`

Från automater till reguljära uttryck



Starttillstånd r
Accepterande tillstånd u och v

Kan vi skriva ett reguljärt uttryck för den här automaten?

Lösning:
`0?0?(1?10?0)*1?1`

Automater till reguljära uttryck

Våra konstruktioner av reguljära uttryck från automater har varit väldigt ad hoc och inte det minsta metodiska.

Automater till reguljära uttryck

Våra konstruktioner av reguljära uttryck från automater har varit väldigt ad hoc och inte det minsta metodiska.

Kan man alltid konvertera en automat till ett reguljärt uttryck?

Automater till reguljära uttryck

Våra konstruktioner av reguljära uttryck från automater har varit väldigt ad hoc och inte det minsta metodiska.

Kan man alltid konvertera en automat till ett reguljärt uttryck?

Förvånande(?): **Ja, det kan man!**

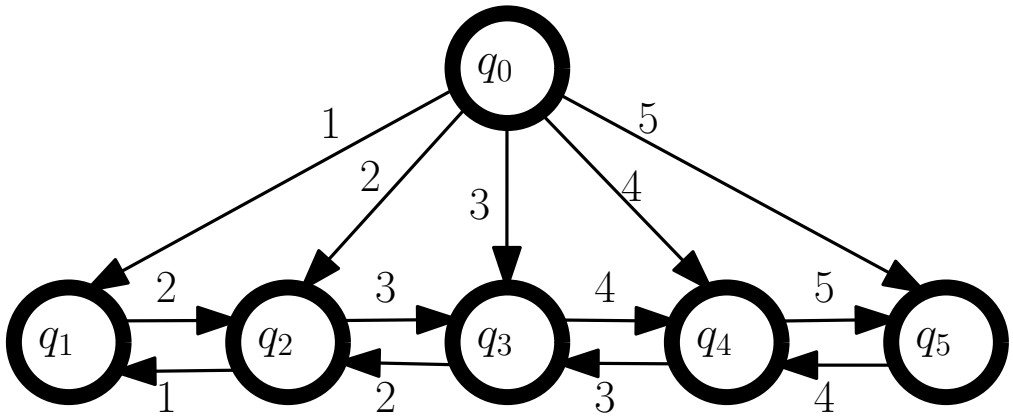
Automater till reguljära uttryck

Våra konstruktioner av reguljära uttryck från automater har varit väldigt ad hoc och inte det minsta metodiska.

Kan man alltid konvertera en automat till ett reguljärt uttryck?

Förvånande(?): **Ja, det kan man!**

...men det reguljära uttrycket kan bli väldigt komplicerat



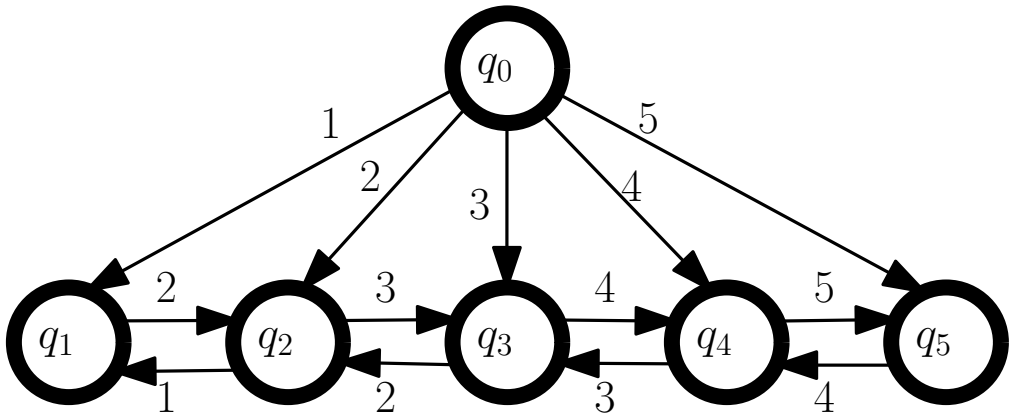
Automater till reguljära uttryck

Våra konstruktioner av reguljära uttryck från automater har varit väldigt ad hoc och inte det minsta metodiska.

Kan man alltid konvertera en automat till ett reguljärt uttryck?

Förvånande(?): **Ja, det kan man!**

...men det reguljära uttrycket kan bli väldigt komplicerat



Alla strängar på tecknen $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ där varje siffra diffar med exakt 1 från föregående.

Reguljärt uttryck för samma språk?

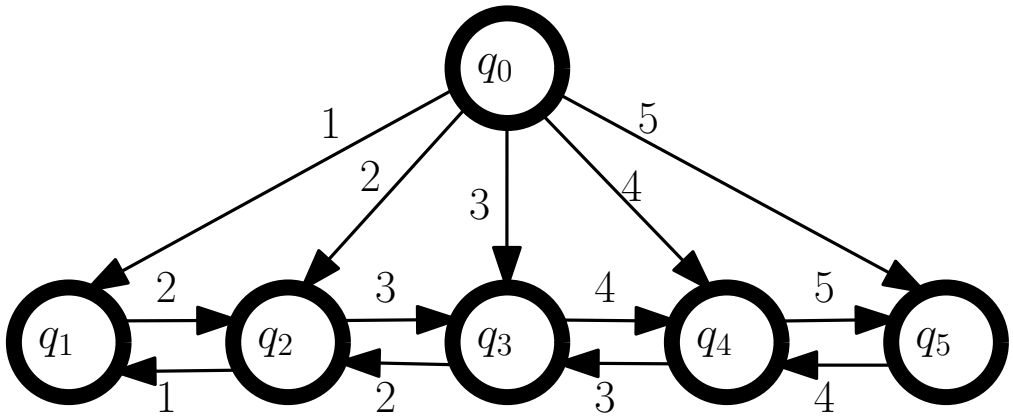
Automater till reguljära uttryck

Våra konstruktioner av reguljära uttryck från automater har varit väldigt ad hoc och inte det minsta metodiska.

Kan man alltid konvertera en automat till ett reguljärt uttryck?

Förvånande(?): **Ja, det kan man!**

...men det reguljära uttrycket kan bli väldigt komplicerat



Alla strängar på tecknen $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ där varje siffra diffar med exakt 1 från föregående.

Reguljärt uttryck för samma språk?

Jag har ingen aning, men jag vet att det existerar...

Reguljära uttryck till automater

Reguljärt uttryck från förra föreläsningen för lokal del av e-post-adress:

```
[A-Za-z0-9]([A-Za-z0-9.]*[A-Za-z0-9])?
```

Reguljära uttryck till automater

Reguljärt uttryck från förra föreläsningen för lokal del av e-post-adress:

`[A-Za-z0-9]([A-Za-z0-9.]*[A-Za-z0-9])?`

Kan vi konstruera en automat som känner igen samma språk?

(kom ihåg: ”känna igen samma språk” = ”beskriver samma mängd strängar”)

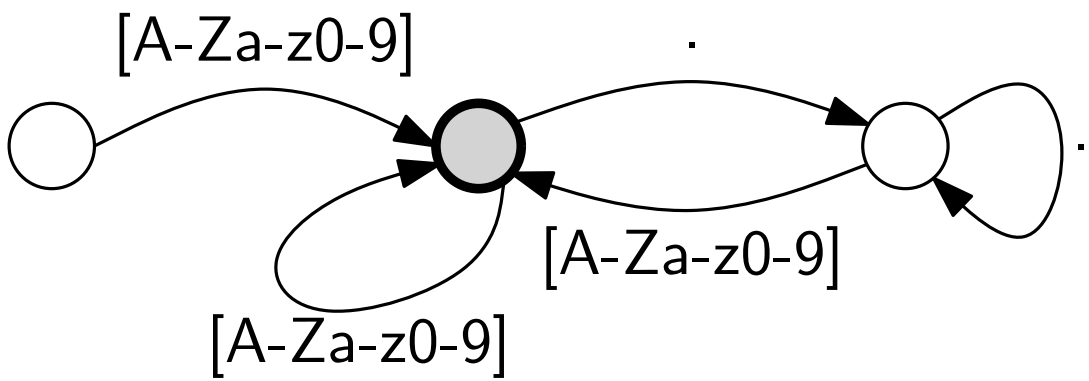
Reguljära uttryck till automater

Reguljärt uttryck från förra föreläsningen för lokal del av e-post-adress:

```
[A-Za-z0-9]([A-Za-z0-9.]*[A-Za-z0-9])?
```

Kan vi konstruera en automat som känner igen samma språk?

(kom ihåg: ”känna igen samma språk” = ”beskriver samma mängd strängar”)



Reguljära uttryck till automater

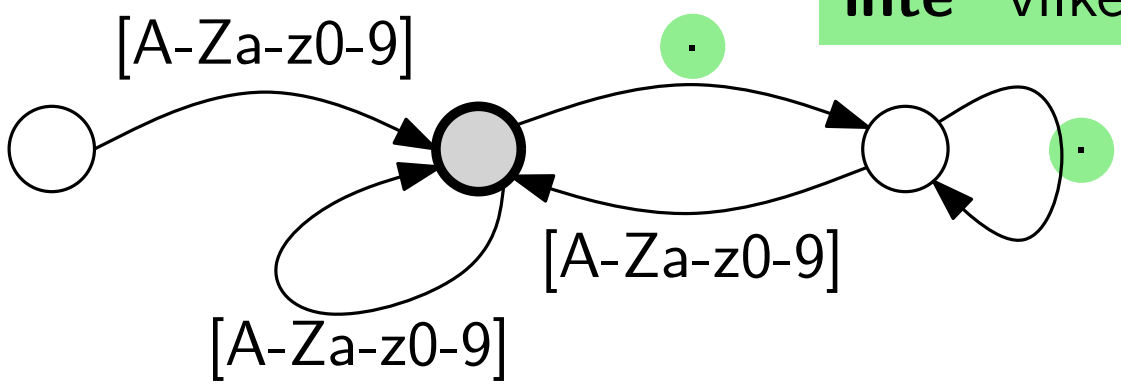
Reguljärt uttryck från förra föreläsningen för lokal del av e-post-adress:

```
[A-Za-z0-9]([A-Za-z0-9.]*[A-Za-z0-9])?
```

Kan vi konstruera en automat som känner igen samma språk?

(kom ihåg: ”känna igen samma språk” = ”beskriver samma mängd strängar”)

OBS: punkterna här betyder ”nästa tecken är en punkt”, **inte** “vilket tecken som helst”



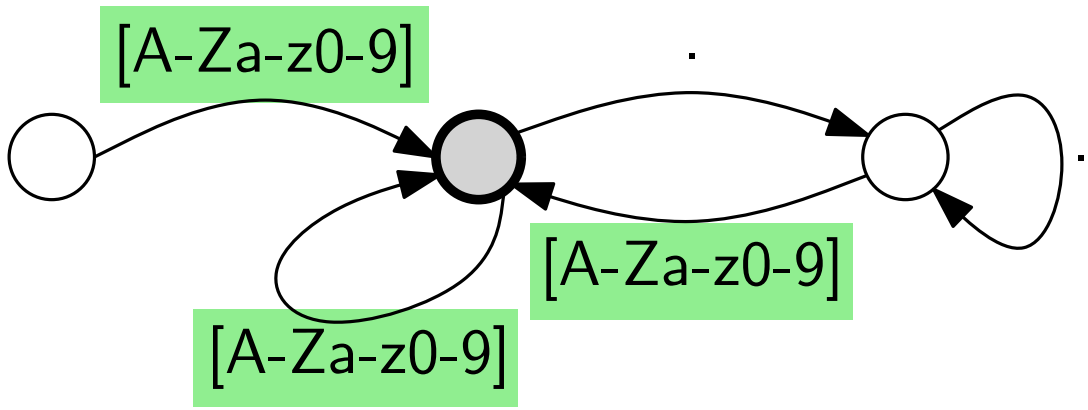
Reguljära uttryck till automater

Reguljärt uttryck från förra föreläsningen för lokal del av e-post-adress:

`[A-Za-z0-9]([A-Za-z0-9.]*[A-Za-z0-9])?`

Kan vi konstruera en automat som känner igen samma språk?

(kom ihåg: ”känna igen samma språk” = ”beskriver samma mängd strängar”)



Tolkas som “en pil för varje tecken i teckenintervallet”

Reguljära uttryck till automater

Kan man alltid konvertera ett reguljärt uttryck till en automat?

Reguljära uttryck till automater

Kan man alltid konvertera ett reguljärt uttryck till en automat?

Ja, det kan man!

Reguljära uttryck till automater

Kan man alltid konvertera ett reguljärt uttryck till en automat?

Ja, det kan man!

(...men automaten kan bli väldigt stor)

Reguljära uttryck till automater

Kan man alltid konvertera ett reguljärt uttryck till en automat?

Ja, det kan man!
(...men automaten kan bli väldigt stor)

Konverteringen går via en annan typ av automat som heter *NFA (Nondeterministic Finite Automaton)*,
icke-deterministisk ändlig automat
(som vi inte kommer prata om alls i den här kursen...)

Reguljära uttryck till automater

Kan man alltid konvertera ett reguljärt uttryck till en automat?

Ja, det kan man!
(...men automaten kan bli väldigt stor)

Konverteringen går via en annan typ av automat som heter *NFA (Nondeterministic Finite Automaton)*,
icke-deterministisk ändlig automat
(som vi inte kommer prata om alls i den här kursen...)

Praktisk betydelse:
ger snabb algoritm (linjär tid) för att matcha reguljära uttryck!

Reguljära uttryck till automater

Kan man alltid konvertera ett reguljärt uttryck till en automat?

Ja, det kan man!
(...men automaten kan bli väldigt stor)

Konverteringen går via en annan typ av automat som heter *NFA (Nondeterministic Finite Automaton)*,
icke-deterministisk ändlig automat
(som vi inte kommer prata om alls i den här kursen...)

Praktisk betydelse:
ger snabb algoritm (linjär tid) för att matcha reguljära uttryck!
Brasklapp:
många implementationer för reguljära uttryck använder en exponentiell backtracking-algoritm

Reguljära uttryck till automater

Kan man alltid konvertera ett reguljärt uttryck till en automat?

Ja, det kan man!
(...men automaten kan bli väldigt stor)

Konverteringen går via en annan typ av automat som heter *NFA (Nondeterministic Finite Automaton)*,
icke-deterministisk ändlig automat
(som vi inte kommer prata om alls i den här kursen...)

Praktisk betydelse:
ger snabb algoritm (linjär tid) för att matcha reguljära uttryck!
Brasklapp:
många implementationer för reguljära uttryck använder en exponentiell backtracking-algoritm
(behövs för att hantera t.ex. bakåtreferenser som finns i regex)

Idag

Reguljära uttryck vs automater

Reguljära språk, begränsningar

Grammatiker

Reguljära språk

Fundamentalt: Reguljära uttryck och DFA är lika kraftfulla – kan beskriva exakt samma klass av språk

Reguljära språk

Fundamentalt: Reguljära uttryck och DFA är lika kraftfulla – kan beskriva exakt samma klass av språk

De språk som man kan beskriva med reguljära uttryck eller DFA kallas för *reguljära språk*

Reguljära språk

Fundamentalt: Reguljära uttryck och DFA är lika kraftfulla – kan beskriva exakt samma klass av språk

De språk som man kan beskriva med reguljära uttryck eller DFA kallas för *reguljära språk*

Exempel:

- språket "giltiga e-post-adresser" är reguljärt
- språket "binära strängar med udda antal ettor" är reguljärt
- alla ändliga språk är reguljära, t.ex. "namnen på de obligatoriska progp-labbarna"

Reguljära språk

Fundamentalt: Reguljära uttryck och DFA är lika kraftfulla – kan beskriva exakt samma klass av språk

De språk som man kan beskriva med reguljära uttryck eller DFA kallas för *reguljära språk*

Exempel:

- språket "giltiga e-post-adresser" är reguljärt
- språket "binära strängar med udda antal ettor" är reguljärt
- alla ändliga språk är reguljära, t.ex. "namnen på de obligatoriska progp-labbarna"

Men vad är exempel på språk som inte är reguljära?

Begränsningar hos reguljära uttryck

Finns det språk man inte kan beskriva med reguljära uttryck (eller automater)?

Och hur kan man isåfall bevisa en sådan sak, att det inte existerar något reguljärt uttryck, hur listig man än är??

Begränsningar hos reguljära uttryck

Finns det språk man inte kan beskriva med reguljära uttryck (eller automater)?

Och hur kan man isåfall bevisa en sådan sak, att det inte existerar något reguljärt uttryck, hur listig man än är??

Typexempel:
$L = \{0^n 1^n \,|\, n \geq 0\}$

Begränsningar hos reguljära uttryck

Finns det språk man inte kan beskriva med reguljära uttryck (eller automater)?

Och hur kan man isåfall bevisa en sådan sak, att det inte existerar något reguljärt uttryck, hur listig man än är??

Typexempel:

$L = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

0^n = strängen som består av n stycken nollor

Begränsningar hos reguljära uttryck

Finns det språk man inte kan beskriva med reguljära uttryck (eller automater)?

Och hur kan man isåfall bevisa en sådan sak, att det inte existerar något reguljärt uttryck, hur listig man än är??

Typexempel:
$L = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

Intuition:
Efter att en automat läst alla nollor måste den komma ihåg exakt hur många det var. Men automaten har inget minne så den kan inte komma ihåg det.

Begränsningar hos reguljära uttryck

Finns det språk man inte kan beskriva med reguljära uttryck (eller automater)?

Och hur kan man isåfall bevisa en sådan sak, att det inte existerar något reguljärt uttryck, hur listig man än är??

Typexempel:
$L = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

Intuition: **(ej bevis!)**
Efter att en automat läst alla nollor måste den komma ihåg exakt hur många det var. Men automaten har inget minne så den kan inte komma ihåg det.

Sanning med modifikation: automaten kan använda de olika tillstånden för att minnas litegrann av vad den sett

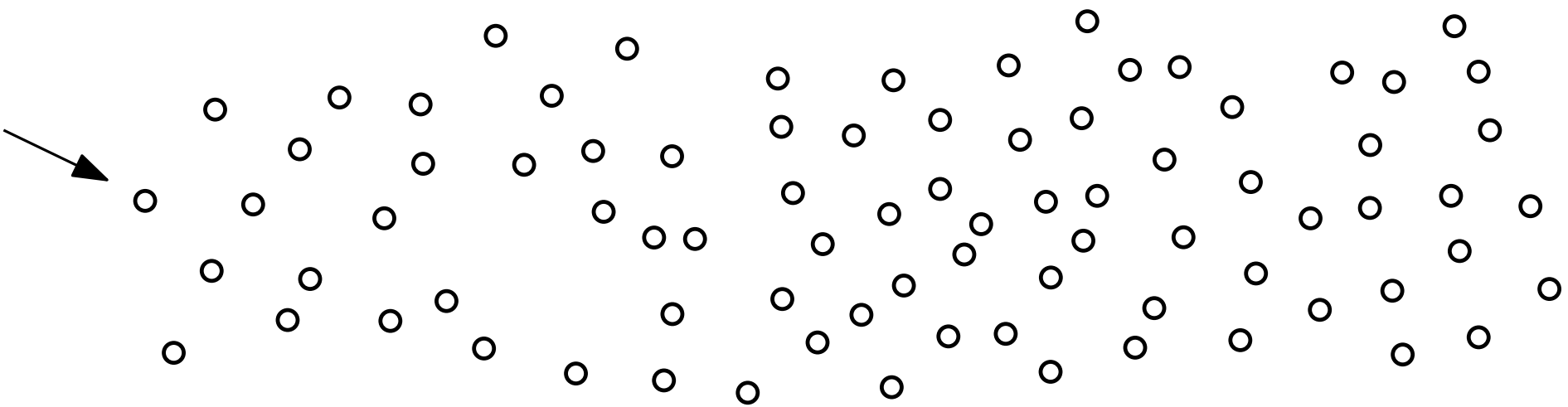
Bevis att $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ inte är reguljärt

Antag att det finns en automat för $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

Bevis att $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ inte är reguljärt

Antag att det finns en automat för $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

Den har ett ändligt antal tillstånd, säg t stycken



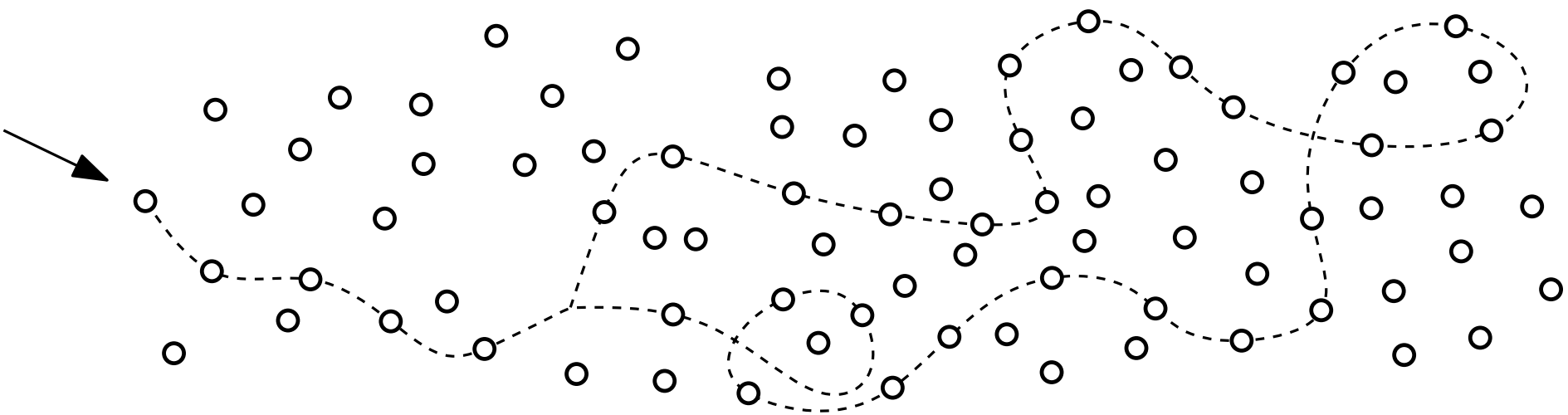
Bevis att $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ inte är reguljärt

Antag att det finns en automat för $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

Den har ett ändligt antal tillstånd, säg t stycken

Betrakta vad som händer när vi kör automaten på en sträng med en massa nollor

---------- vägen vi följer på indata 000000000000000000000000



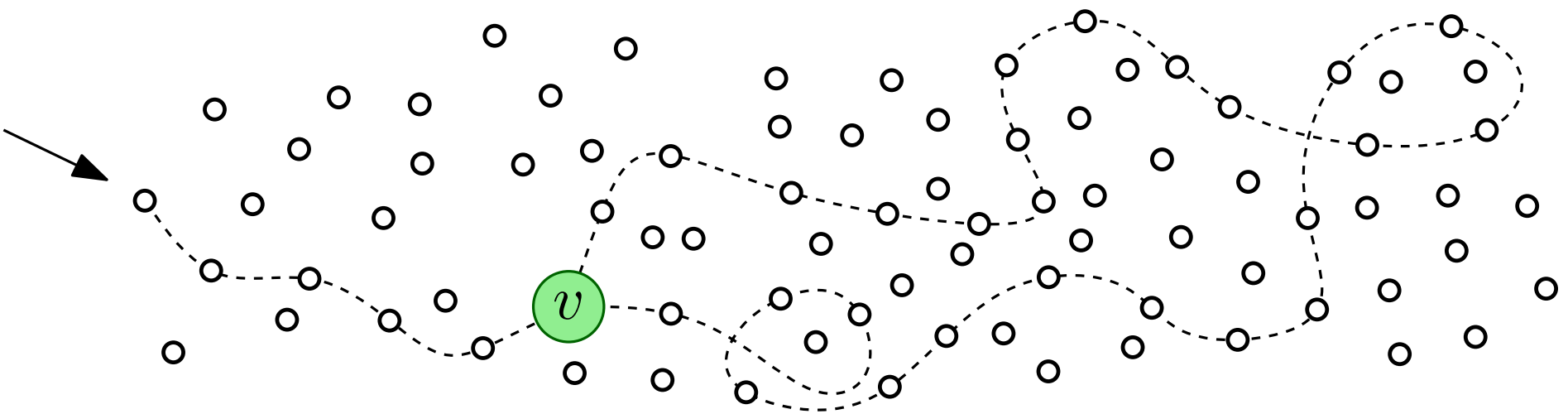
Bevis att $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ inte är reguljärt

Antag att det finns en automat för $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

Den har ett ändligt antal tillstånd, säg t stycken

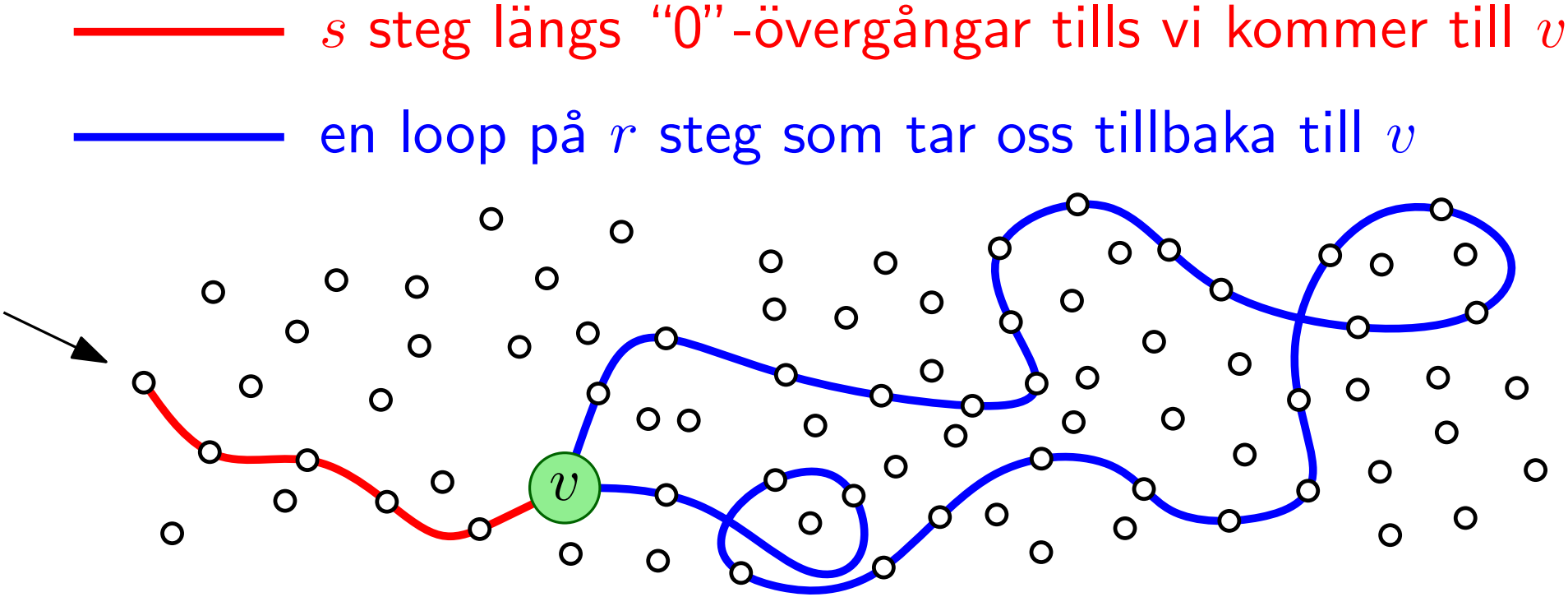
Betrakta vad som händer när vi kör automaten på en sträng med en massa nollor

Efter högst t steg måste vi komma tillbaka till något tillstånd v som vi redan besökt (varför)?



Bevis att $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ inte är reguljärt

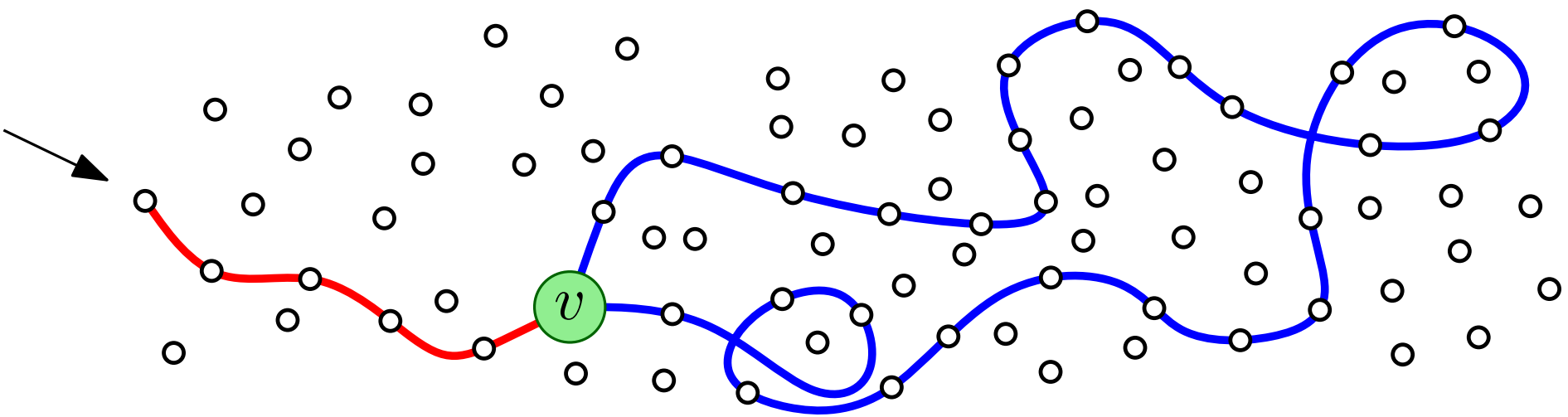
Säg att vi besöker v efter s steg och $s + r$ steg på indata 000000



Bevis att $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ inte är reguljärt

Säg att vi besöker v efter s steg och $s + r$ steg på indata 000000

Hur kommer automaten bete sig på indata $0^s 1^s$?



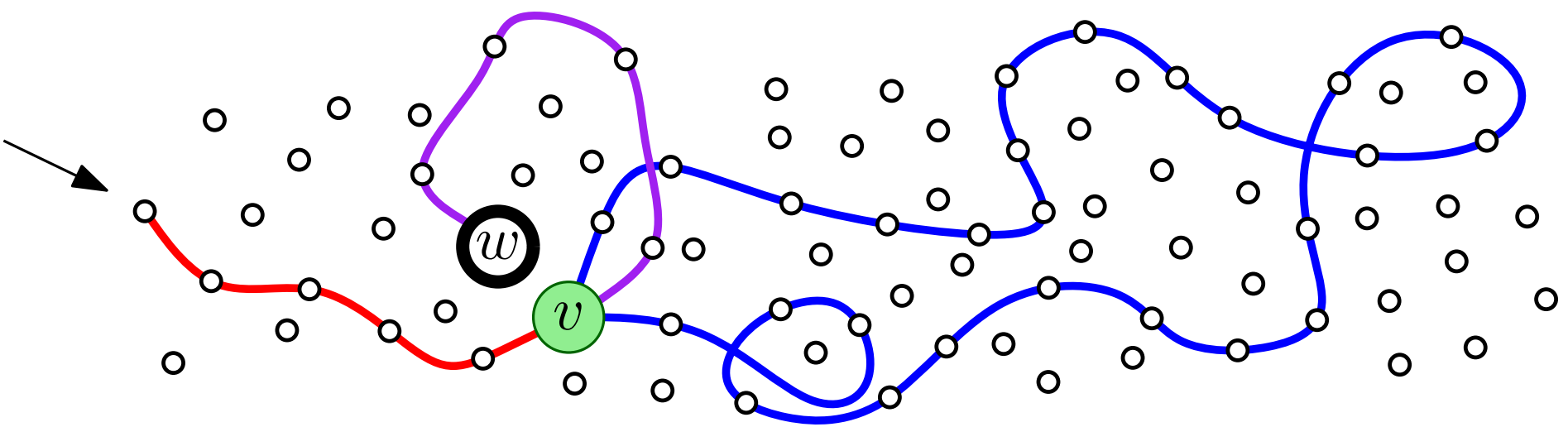
Bevis att $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ inte är reguljärt

Säg att vi besöker v efter s steg och $s + r$ steg på indata 000000

Hur kommer automaten bete sig på indata $0^s 1^s$?

Den kommer ta s steg till v, sedan s steg till något accepterande tillstånd w (varför?)

s steg längs "1"-övergångar



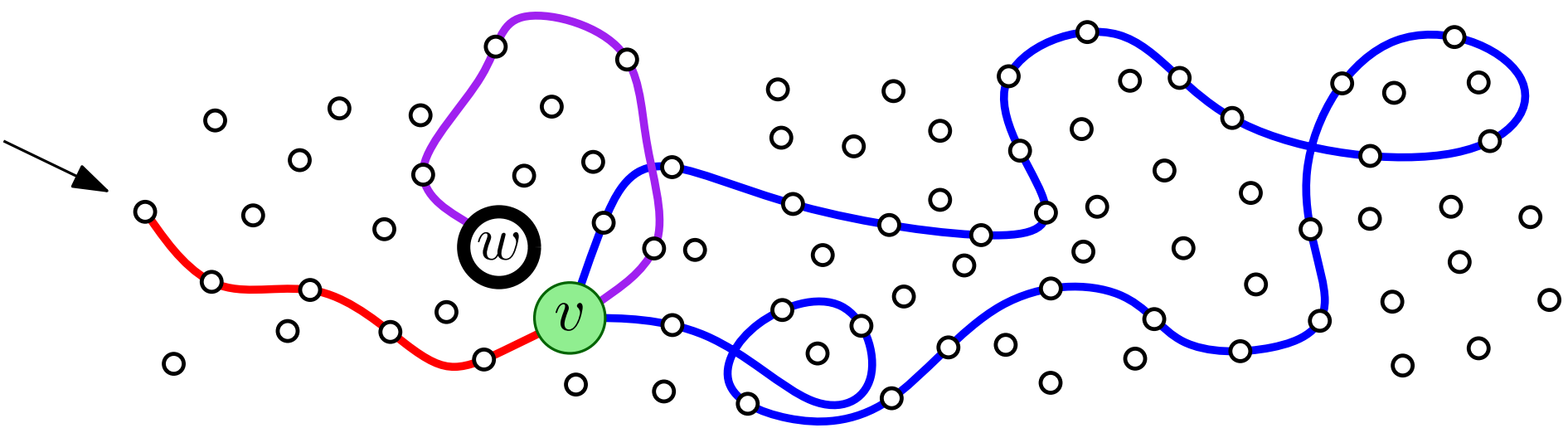
Bevis att $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ inte är reguljärt

Säg att vi besöker v efter s steg och $s + r$ steg på indata 000000

Hur kommer automaten bete sig på indata $0^s 1^s$?

Den kommer ta s steg till v, sedan s steg till något accepterande tillstånd w (varför?)

Hur kommer automaten bete sig på indata $0^{s+r} 1^s$?



Bevis att $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ inte är reguljärt

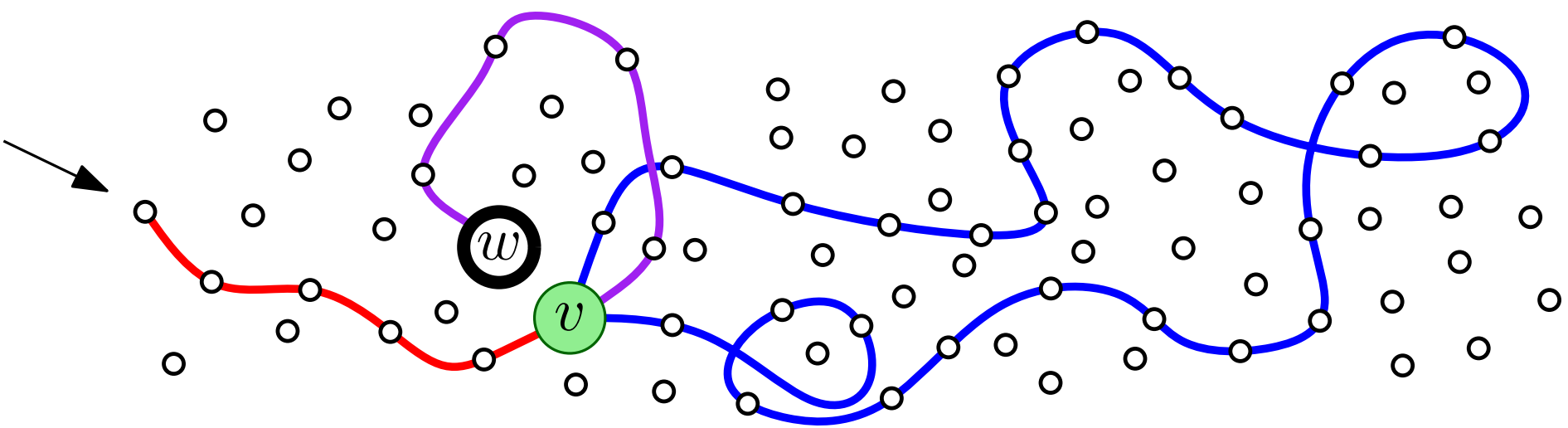
Säg att vi besöker v efter s steg och $s + r$ steg på indata 000000

Hur kommer automaten bete sig på indata $0^s 1^s$?

Den kommer ta s steg till v, sedan s steg till något accepterande tillstånd w (varför?)

Hur kommer automaten bete sig på indata $0^{s+r} 1^s$?

Den kommer ta s steg till v, sedan r steg för ett varv i loopen, sedan s steg till w (varför?)



Bevis att $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ inte är reguljärt

Säg att vi besöker v efter s steg och $s + r$ steg på indata 000000

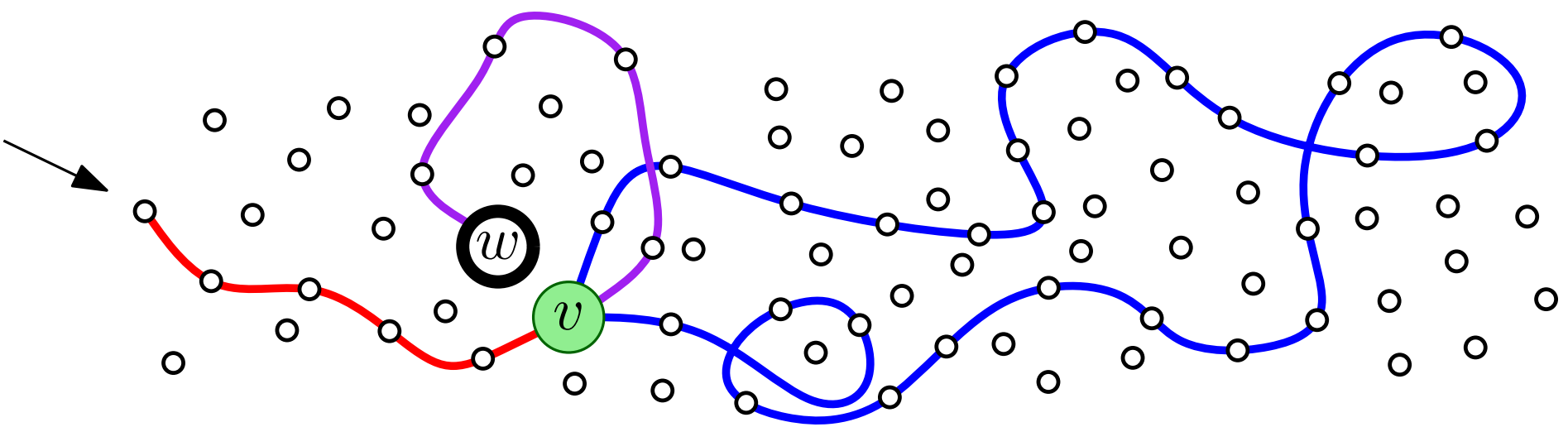
Hur kommer automaten bete sig på indata $0^s 1^s$?

Den kommer ta s steg till v, sedan s steg till något accepterande tillstånd w (varför?)

Hur kommer automaten bete sig på indata $0^{s+r} 1^s$?

Den kommer ta s steg till v, sedan r steg för ett varv i loopen, sedan s steg till w (varför?)

$\Longrightarrow$ automaten accepterar strängen $0^{s+r} 1^s$, **motsägelse**!



Icke-reguljära språk

Beviset vi just såg kan generaliseras för att visa att många andra språk inte heller är reguljära.

Icke-reguljära språk

Beviset vi just såg kan generaliseras för att visa
att många andra språk inte heller är reguljära.

Exempel:

- Balanserade parentesuttryck
- Palindrom (t.ex. “abba”, “nitalarbralatin”)
- Strängar på formen xx för någon sträng $x \in \{0,1\}^n$
  (t.ex. “aa”, “hejhej”, “0111001011001”)

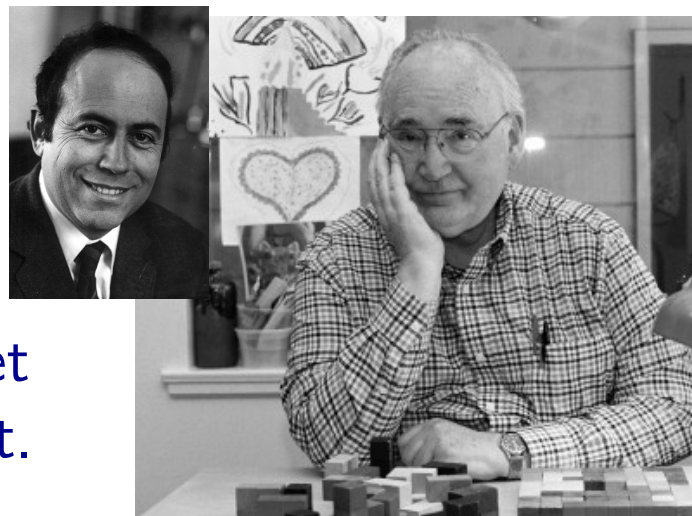
Icke-reguljära språk

Beviset vi just såg kan generaliseras för att visa att många andra språk inte heller är reguljära.

Exempel:

- Balanserade parentesuttryck
- Palindrom (t.ex. “abba”, “nitalarbralatin”)
- Strängar på formen xx för någon sträng $x \in \{0,1\}^n$ (t.ex. “aa”, “hejhej”, “01110010111001”)

Detta kallas för *pumping-lemmat* (för reguljära språk), och upptäcktes av Michael Rabin och Dana Scott 1959



Samma artikeln gav dem Turing-priset (“datavetenskapens Nobelpris”) 1976, för konceptet “icke-determinism” som de introducerade samtidigt.

Icke-reguljära språk

Beviset vi just såg kan generaliseras för att visa att många andra språk inte heller är reguljära.

Exempel:

- Balanserade parentesuttryck
- Palindrom (t.ex. “abba”, “nitalarbralatin”)
- Strängar på formen xx för någon sträng $x \in \{0,1\}^n$ (t.ex. “aa”, “hejhej”, “01110010111001”)

Men... kan vi inte känna igen detta med regexet “`([01]*)\1`”?

Icke-reguljära språk

Beviset vi just såg kan generaliseras för att visa att många andra språk inte heller är reguljära.

Exempel:

- Balanserade parentesuttryck
- Palindrom (t.ex. "abba", "nitalarbralatin")
- Strängar på formen xx för någon sträng $x \in \{0,1\}^n$ (t.ex. "aa", "hejhej", "01110010111001")

Men... kan vi inte känna igen detta med regexet "`([01]*)\1`"?

Jo. Detta är ett exempel på hur regexar är kraftfullare (ger möjlighet att uttrycka fler saker) än reguljära uttryck.

Egenskaper hos reguljära språk

Antag att A och B är reguljära språk över Σ. Då gäller följande:

Egenskaper hos reguljära språk

Antag att A och B är reguljära språk över Σ. Då gäller följande:

- $\overline{A} = \Sigma^* - A$, dvs, A-komplement, är reguljärt.
  Bevisidé: byt mellan accepterande och icke-accepterande tillstånd i DFA för A (obs: fail-tillståndet viktigt!)

Egenskaper hos reguljära språk

Antag att A och B är reguljära språk över Σ. Då gäller följande:

- $\overline{A} = \Sigma^* - A$, dvs, A-komplement, är reguljärt.
  Bevisidé: byt mellan accepterande och icke-accepterande tillstånd i DFA för A (obs: fail-tillståndet viktigt!)
- $A \cup B$ är reguljärt.
  Bevisidé: beskrivs av $R_A|R_B$.

Egenskaper hos reguljära språk

Antag att A och B är reguljära språk över Σ. Då gäller följande:

- $\overline{A} = \Sigma^* - A$, dvs, A-komplement, är reguljärt.
  Bevisidé: byt mellan accepterande och icke-accepterande tillstånd i DFA för A (obs: fail-tillståndet viktigt!)
- $A \cup B$ är reguljärt.
  Bevisidé: beskrivs av $R_A|R_B$.
- $A \cap B$ är reguljärt.
  Bevisidé: använd $A \cap B = \overline{(\overline{A} \cup \overline{B})}$.

Egenskaper hos reguljära språk

Antag att A och B är reguljära språk över Σ. Då gäller följande:

- $\overline{A} = \Sigma^* - A$, dvs, A-komplement, är reguljärt.
  Bevisidé: byt mellan accepterande och icke-accepterande tillstånd i DFA för A (obs: fail-tillståndet viktigt!)
- $A \cup B$ är reguljärt.
  Bevisidé: beskrivs av $R_A|R_B$.
- $A \cap B$ är reguljärt.
  Bevisidé: använd $A \cap B = \overline{(\overline{A} \cup \overline{B})}$.
- $A - B$ är reguljärt.
  Bevisidé: använd $A - B = A \cap \overline{B}$.

Egenskaper hos reguljära språk

Antag att A och B är reguljära språk över Σ. Då gäller följande:

- $\overline{A} = \Sigma^* - A$, dvs, A-komplement, är reguljärt.
  Bevisidé: byt mellan accepterande och icke-accepterande tillstånd i DFA för A (obs: fail-tillståndet viktigt!)
- $A \cup B$ är reguljärt.
  Bevisidé: beskrivs av $R_A|R_B$.
- $A \cap B$ är reguljärt.
  Bevisidé: använd $A \cap B = \overline{(\overline{A} \cup \overline{B})}$.
- $A - B$ är reguljärt.
  Bevisidé: använd $A - B = A \cap \overline{B}$.

Kan användas för att visa att språk är reguljära utan att konstruera automat eller reguljärt uttryck. T.ex. “alla strängar som uppfyller krav X och Y men inte Z”, där X, Y, Z är reguljära

Idag

Reguljära uttryck vs automater

Reguljära språk, begränsningar

Grammatiker

Grammatiker

Vi ska nu titta på ett annat sätt att beskriva språk på, som är mycket mer kraftfullt/uttrycksfullt

Grammatiker

Vi ska nu titta på ett annat sätt att beskriva språk på, som är mycket mer kraftfullt/uttrycksfullt

Varför kan inte reguljära uttryck beskriva balanserade parentesuttryck?

Grammatiker

Vi ska nu titta på ett annat sätt att beskriva språk på, som är mycket mer kraftfullt/uttrycksfullt

Varför kan inte reguljära uttryck beskriva balanserade parentesuttryck?

På sätt och vis kan man kan säga att det delvis beror på att balanserade parentesuttryck har en rekursiv struktur.

Grammatik för parentesuttryck

Vi kan definiera balanserade parentesuttryck matematiskt enligt följande:

Grammatik för parentesuttryck

Vi kan definiera balanserade parentesuttryck matematiskt enligt följande:

- **Basfall:**
  tomma strängen är ett balanserat parentesuttryck

Grammatik för parentesuttryck

Vi kan definiera balanserade parentesuttryck matematiskt enligt följande:

- **Basfall:**
  tomma strängen är ett balanserat parentesuttryck
- **Induktiv definition:**
  om "x" och "y" är balanserade parentesuttryck så är "$(x)y$" ett balanserat parentesuttryck

Grammatik för parentesuttryck

Vi kan definiera balanserade parentesuttryck matematiskt enligt följande:

- **Basfall:**
  tomma strängen är ett balanserat parentesuttryck
- **Induktiv definition:**
  om "x" och "y" är balanserade parentesuttryck så är "$(x)y$" ett balanserat parentesuttryck

Grammatiker är ett sätt att beskriva språk med den här typen av definitioner

Grammatik för parentesuttryck

Vi kan definiera balanserade parentesuttryck matematiskt enligt följande:

- **Basfall:**
  tomma strängen är ett balanserat parentesuttryck
- **Induktiv definition:**
  om "x" och "y" är balanserade parentesuttryck så är "$(x)y$" ett balanserat parentesuttryck

Grammatiker är ett sätt att beskriva språk med den här typen av definitioner

En grammatik för balanserade parentesuttryck:

$$\text{Expr} \rightarrow \epsilon | (\text{Expr})\text{Expr}$$

Grammatik för parentesuttryck

Vi kan definiera balanserade parentesuttryck matematiskt enligt följande:

- **Basfall:**
  tomma strängen är ett balanserat parentesuttryck
- **Induktiv definition:**
  om "x" och "y" är balanserade parentesuttryck så är "$(x)y$" ett balanserat parentesuttryck

Grammatiker är ett sätt att beskriva språk med den här typen av definitioner

En grammatik för balanserade parentesuttryck:

$$\text{Expr} \rightarrow \epsilon | (\text{Expr})\text{Expr}$$

Utläses "Ett Expr är antingen tomma strängen, eller så är det vänsterparentes följt av ett Expr följt av högerparentes följt av ett Expr"

Beståndsdelar i en grammatik

Slutsymboler (eng. terminals): de symboler som ingår i indata (tänk på det som tecken tills vidare)

Beståndsdelar i en grammatik

Slutsymboler (eng. terminals): de symboler som ingår i indata (tänk på det som tecken tills vidare)

Icke-slutsymboler (eng. non-terminals): olika typer av delsträngar som kan förekomma i indata, t.ex.: en for-loop.

Beståndsdelar i en grammatik

Slutsymboler (eng. terminals): de symboler som ingår i indata (tänk på det som tecken tills vidare)

Icke-slutsymboler (eng. non-terminals): olika typer av delsträngar som kan förekomma i indata, t.ex.: en for-loop.

Produktionsregler (eng. production rules): regler för hur varje icke-slutsymbol kan formas, i termer av slutsymboler och andra icke-slutsymboler

Beståndsdelar i en grammatik

Slutsymboler (eng. terminals): de symboler som ingår i indata (tänk på det som tecken tills vidare)

Icke-slutsymboler (eng. non-terminals): olika typer av delsträngar som kan förekomma i indata, t.ex.: en for-loop.

Produktionsregler (eng. production rules): regler för hur varje icke-slutsymbol kan formas, i termer av slutsymboler och andra icke-slutsymboler

Exempel

$S \rightarrow B \mid AA$

$A \rightarrow cA \mid dB$

$B \rightarrow aSa \mid \epsilon$

Icke-slutsymboler S, A, B. Slutsymboler a, c, d.

Beståndsdelar i en grammatik

Slutsymboler (eng. terminals): de symboler som ingår i indata (tänk på det som tecken tills vidare)

Icke-slutsymboler (eng. non-terminals): olika typer av delsträngar som kan förekomma i indata, t.ex.: en for-loop.

Produktionsregler (eng. production rules): regler för hur varje icke-slutsymbol kan formas, i termer av slutsymboler och andra icke-slutsymboler

Exempel

$S \rightarrow B \mid AA$

$A \rightarrow cA \mid dB$

$B \rightarrow aSa \mid \epsilon$

Ett S är antingen ett B
eller ett A följt av ett A

Icke-slutsymboler S, A, B. Slutsymboler a, c, d.

Beståndsdelar i en grammatik

Slutsymboler (eng. terminals): de symboler som ingår i indata (tänk på det som tecken tills vidare)

Icke-slutsymboler (eng. non-terminals): olika typer av delsträngar som kan förekomma i indata, t.ex.: en for-loop.

Produktionsregler (eng. production rules): regler för hur varje icke-slutsymbol kan formas, i termer av slutsymboler och andra icke-slutsymboler

Exempel

$S \rightarrow B \mid AA$

$A \rightarrow cA \mid dB$

$B \rightarrow aSa \mid \epsilon$

Ett A är antingen ett c följt av ett A eller ett d följt av ett B

Icke-slutsymboler S, A, B. Slutsymboler a, c, d.

Beståndsdelar i en grammatik

Slutsymboler (eng. terminals): de symboler som ingår i indata (tänk på det som tecken tills vidare)

Icke-slutsymboler (eng. non-terminals): olika typer av delsträngar som kan förekomma i indata, t.ex.: en for-loop.

Produktionsregler (eng. production rules): regler för hur varje icke-slutsymbol kan formas, i termer av slutsymboler och andra icke-slutsymboler

Exempel

$S \rightarrow B \mid AA$

$A \rightarrow cA \mid dB$

$B \rightarrow aSa \mid \epsilon$

Ett B är antingen ett a följt av ett S följt av ett a, eller tomma strängen, ϵ

Icke-slutsymboler S, A, B. Slutsymboler a, c, d.

Grammatik för programmeringsspråk

Grammatiker är tillräckligt kraftfulla för att beskriva syntaxen för ens favoritprogramspråk.

Grammatik för programmeringsspråk

Grammatiker är tillräckligt kraftfulla för att beskriva syntaxen för ens favoritprogramspråk.

Statement → `begin` StatementList `end` |
`if` Conditional `then` Statement `else` Statement |
Assignment |
FunctionCall |
...

StatementList → StatementList ; Statement |
Statement

Assignment → Variable = Expression

FunctionCall → FunctionName (ParameterList)

Grammatik för programmeringsspråk

Grammatiker är tillräckligt kraftfulla för att beskriva syntaxen för ens favoritprogramspråk.

$$
\begin{aligned}
\text{Statement} \rightarrow & \texttt{begin StatementList end} \mid \\
& \texttt{if Conditional then Statement else Statement} \mid \\
& \text{Assignment} \mid \\
& \text{FunctionCall} \mid \\
& \ldots \\
\text{StatementList} \rightarrow & \text{StatementList}\,;\text{Statement} \mid \\
& \text{Statement} \\
\text{Assignment} \rightarrow & \text{Variable=Expression} \\
\text{FunctionCall} \rightarrow & \text{FunctionName(ParameterList)}
\end{aligned}
$$

...plus många många fler produktionsregler och symboler

Googlar man på “grammar for [språk] syntax” brukar man hitta en formell grammatik för språket

Exempel

$S \to B \mid AA$

$A \to cA \mid dB$

$B \to aSa \mid \epsilon$

Startsymbol S

Exempel

$S \to B \mid AA$

$A \to cA \mid dB$

$B \to aSa \mid \epsilon$

Startsymbol S

Hur hitta strängar som ligger i språket?

Exempel

$S \to B \mid AA$

$A \to cA \mid dB$

$B \to aSa \mid \epsilon$

Startsymbol S

Hur hitta strängar som ligger i språket?

Använd produktionsreglerna!

Exempel

$S \to B \mid AA$

$A \to cA \mid dB$

$B \to aSa \mid \epsilon$

Startsymbol S

Hur hitta strängar som ligger i språket?

Använd produktionsreglerna!

$S \to B \to aSa \to aBa \to aa$

Exempel

$S \to B \mid AA$

$A \to cA \mid dB$

$B \to aSa \mid \epsilon$

Startsymbol S

Hur hitta strängar som ligger i språket?

Använd produktionsreglerna!

$S \to B \to aSa \to aBa \to aa$

$S \to B \to aSa \to aAAa \to acAAa \to acdBAa \to acdAa \to acddBa \to acdda$

Exempel

$S \to B \mid AA$

$A \to cA \mid dB$

$B \to aSa \mid \epsilon$

Startsymbol S

Hur hitta strängar som ligger i språket?

Använd produktionsreglerna!

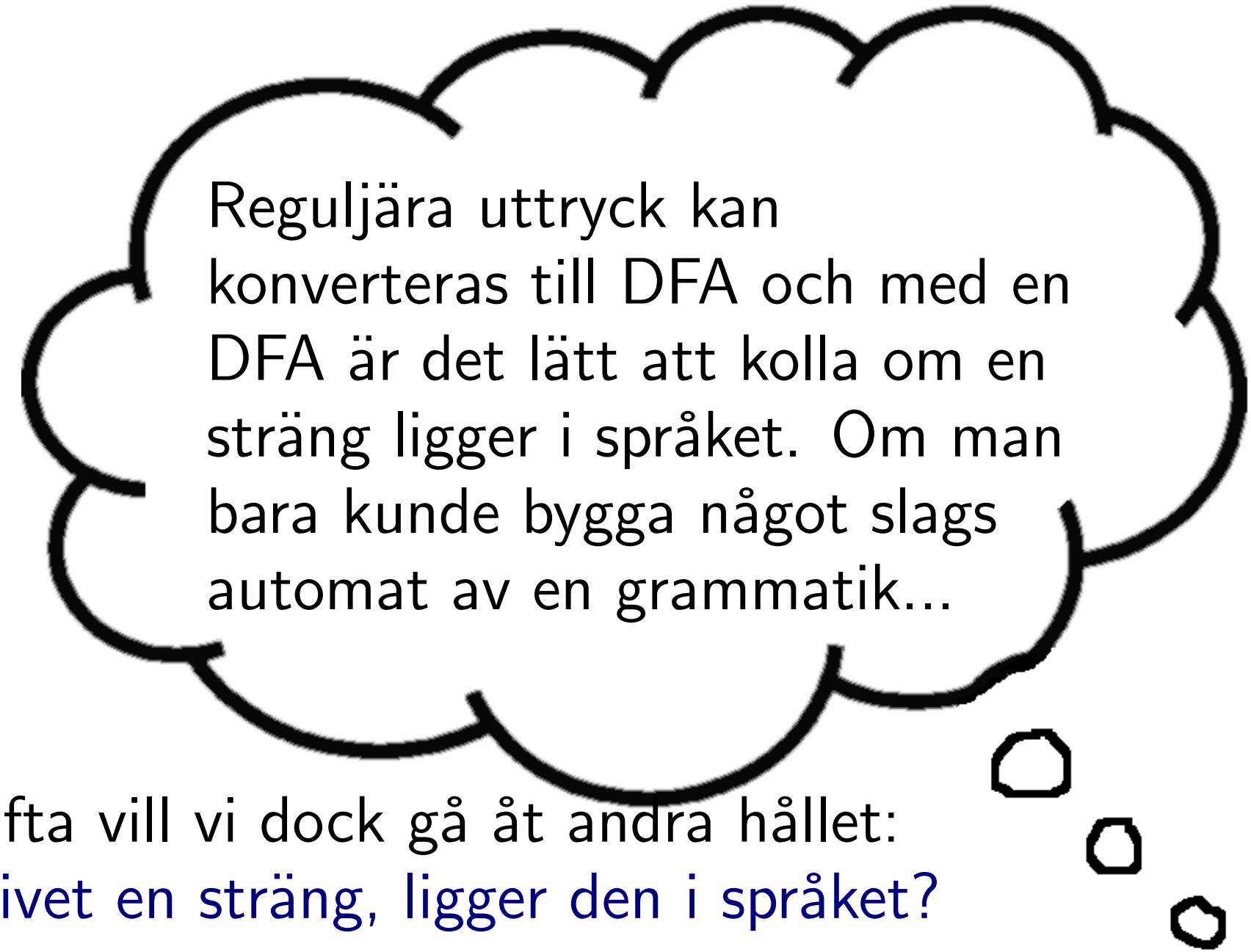
$S \to B \to aSa \to aBa \to aa$

$S \to B \to aSa \to aAAa \to acAAa \to acdBAa \to acdAa \to acddBa \to acdda$

Ofta vill vi dock gå åt andra hållet:

Givet en sträng, ligger den i språket?

Exempel



Ofta vill vi dock gå åt andra hållet:
Givet en sträng, ligger den i språket?

Notationer för grammatiker

Två vanliga sätt att ”formatera” en grammatik:

Notationer för grammatiker

Två vanliga sätt att "formatera" en grammatik:

Matematisk notation:

$S \to B \mid AA$

$A \to cA \mid dB$

$B \to aSa \mid \epsilon$

Måste tydligt ange vad som är slutsymboler och vad som är icke-slutsymboler.

Notationer för grammatiker

Två vanliga sätt att "formatera" en grammatik:

Matematisk notation:

$S \rightarrow B \mid AA$

$A \rightarrow cA \mid dB$

$B \rightarrow aSa \mid \epsilon$

Måste tydligt ange vad som är slutsymboler och vad som är icke-slutsymboler.

Backus-Naur-form (BNF):

```
<S> ::= <B> | <A><A>
<A> ::= "c" <A> | "d" <B>
<B> ::= "a" <S> "a" | ""
```

Pratigare, men explicit markering av slutsymboler (med citationstecken runt) och icke-slutsymboler (med <> runt).

Notationer för grammatiker

Två vanliga sätt att "formatera" en grammatik:

Matematisk notation:

$S \rightarrow B \mid AA$

$A \rightarrow cA \mid dB$

$B \rightarrow aSa \mid \epsilon$

Måste tydligt ange vad som är slutsymboler och vad som är icke-slutsymboler.

Backus-Naur-form (BNF):

```
<S> ::= <B> | <A><A>
<A> ::= "c" <A> | "d" <B>
<B> ::= "a" <S> "a" | ""
```

Pratigare, men explicit markering av slutsymboler (med citationstecken runt) och icke-slutsymboler (med <> runt).

Vilken är "bäst"? Beror på personlig preferens.

Exempel: grammatik för Prolog-listor

Låt oss försöka skriva en grammatik som beskriver syntaxen för listor i Prolog, t.ex.:

```
[1, 2, 3]    [1 | [2, 3]]    []    [1 | [2 | [3]]]
```

Exempel: grammatik för Prolog-listor

Låt oss försöka skriva en grammatik som beskriver syntaxen för listor i Prolog, t.ex.:

```
[1, 2, 3]    [1 | [2, 3]]    []    [1 | [2 | [3]]]
```

Induktiv definition:

Basfall 1 Tomma listan "`[]`" är en Prolog-lista.

Basfall(?) 2 Om L är en komma-separerad sekvens av list-element så är "`[L]`" en Prolog-lista

Induktivt fall Om H är ett list-element och T är en Prolog-lista så är "`[H|T]`" en Prolog-lista.

Exempel: grammatik för Prolog-listor

Låt oss försöka skriva en grammatik som beskriver syntaxen för listor i Prolog, t.ex.:

```
[1, 2, 3]    [1 | [2, 3]]    []    [1 | [2 | [3]]]
```

Induktiv definition:

Basfall 1 Tomma listan "`[]`" är en Prolog-lista.

Basfall(?) 2 Om L är en komma-separerad sekvens av list-element så är "`[L]`" en Prolog-lista

Induktivt fall Om H är ett list-element och T är en Prolog-lista så är "`[H|T]`" en Prolog-lista.

De tre fallen uttryckta i BNF-notation:

```
<List> ::= "[]"
         | "[" <ListElems> "]"
         | "[" <ListElem> "|" <List> "]"
```

Grammatik för Prolog-listor (forts.)

```
<List> ::= "[]"
         | "[" <ListElems> "]"
         | "[" <ListElem> "|" <List> "]"
```

<List> nu definierad i termer av två andra icke-slutsymboler, vi måste definiera dessa också.

Grammatik för Prolog-listor (forts.)

```
<List> ::= "[]"
         | "[" <ListElems> "]"
         | "[" <ListElem> "|" <List> "]"
```

`<List>` nu definierad i termer av två andra icke-slutsymboler, vi måste definiera dessa också.

Induktiv definition av `<ListElems>`:

Basfall Om E är ett list-element så är "E" också en sekvens av list-element (`<ListElems>`).

Induktivt fall Om E är ett list-element och L är en sekvens av list-element så är "`E, L`" en sekvens av list-element.

Grammatik för Prolog-listor (forts.)

```
<List> ::= "[]"
         | "[" <ListElems> "]"
         | "[" <ListElem> "|" <List> "]"

<ListElems> ::= <ListElem>
              | <ListElem> "," <ListElems>
```

`<List>` nu definierad i termer av två andra icke-slutsymboler, vi måste definiera dessa också.

Induktiv definition av `<ListElems>`:

Basfall Om E är ett list-element så är "E" också en sekvens av list-element (`<ListElems>`).

Induktivt fall Om E är ett list-element och L är en sekvens av list-element så är "`E, L`" en sekvens av list-element.

Grammatik för Prolog-listor (forts.)

```
<List> ::= "[]"
         | "[" <ListElems> "]"
         | "[" <ListElem> "|" <List> "]"

<ListElems> ::= <ListElem>
              | <ListElem> "," <ListElems>
```

Återstår att definiera `<ListElem>`, hur ska detta göras?

Grammatik för Prolog-listor (forts.)

```
<List> ::= "[]"
         | "[" <ListElems> "]"
         | "[" <ListElem> "|" <List> "]"

<ListElems> ::= <ListElem>
              | <ListElem> "," <ListElems>
```

Återstår att definiera `<ListElem>`, hur ska detta göras?

I riktig Prolog kan list-elementen vara godtyckliga Prolog-termer (inklusive nya listor), vi skulle få en regel som ser ut något i stil med:

```
<ListElem> ::= <List> | <String> | <Integer> | ......
```

Grammatik för Prolog-listor (forts.)

```
<List> ::= "[]"
         | "[" <ListElems> "]"
         | "[" <ListElem> "|" <List> "]"

<ListElems> ::= <ListElem>
              | <ListElem> "," <ListElems>
```

Återstår att definiera `<ListElem>`, hur ska detta göras?

I riktig Prolog kan list-elementen vara godtyckliga Prolog-termer (inklusive nya listor), vi skulle få en regel som ser ut något i stil med:

```
<ListElem> ::= <List> | <String> | <Integer> | ......
```

För att exemplet ska ta slut, låt oss begränsa oss till listor där elementen är binära värden 0 eller 1.

Grammatik för Prolog-listor (forts.)

```
<List> ::= "[]"
         | "[" <ListElems> "]"
         | "[" <ListElem> "|" <List> "]"

<ListElems> ::= <ListElem>
              | <ListElem> "," <ListElems>

<ListElem> ::= "0" | "1"
```

Återstår att definiera `<ListElem>`, hur ska detta göras?

I riktig Prolog kan list-elementen vara godtyckliga Prolog-termer (inklusive nya listor), vi skulle få en regel som ser ut något i stil med:

```
<ListElem> ::= <List> | <String> | <Integer> | ......
```

För att exemplet ska ta slut, låt oss begränsa oss till listor där elementen är binära värden 0 eller 1.

Grammatik för Prolog-listor (forts.)

```
<List> ::= "[]"
         | "[" <ListElems> "]"
         | "[" <ListElem> "|" <List> "]"

<ListElems> ::= <ListElem>
              | <ListElem> "," <ListElems>

<ListElem> ::= "0" | "1"
```

Färdig grammatik för Prolog-listor där varje element är antingen 0 eller 1.

Grammatik för Prolog-listor (forts.)

```
<List> ::= "[]"
         | "[" <ListElems> "]"
         | "[" <ListElem> "|" <List> "]"

<ListElems> ::= <ListElem>
              | <ListElem> "," <ListElems>

<ListElem> ::= "0" | "1"
```

Färdig grammatik för Prolog-listor där varje element är antingen 0 eller 1.

Namnen som vi använt på icke-slutsymbolerna är helt godtyckliga, de kan vara vad vi vill, men det är ju bra om de ungefär beskriver vad de gör.

Grammatik för Prolog-listor (forts.)

```
<Banan1> ::= "[]"
           | "[" <Banan2> "]"
           | "[" <Banan3> "|" <Banan1> "]"

<Banan2> ::= <Banan3>
           | <Banan3> "," <Banan2>

<Banan3> ::= "0" | "1"
```

Samma grammatik, fast mycket svårare att förstå pga obegripliga namn på icke-slut-symbolerna

Namnen som vi använt på icke-slutsymbolerna är helt godtyckliga, de kan vara vad vi vill, men det är ju bra om de ungefär beskriver vad de gör.

Nästa föreläsning

Grammatiker i praktiken

- Lexikal analys
- Härledningar och syntaxträd
- Rekursiv medåkning

Lite mer teori:

- Tvetydighet och omskrivning
- Stackautomater