SF1624 Algebra och geometri

Föreläsning 3

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

4 november 2016

Dagens ämne:

Kryssprodukt (a.k.a. vektorprodukt), kapitel 1.5 i boken

- Definition
- Egenskaper
- Användning
- Mer om linjer och plan
- Areor och volymer

Kryssprodukt finns bara i $\mathbf{R}^3$:

Om $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ och $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ så definieras kryssprodukten

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix}$$

Exempel:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 13 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Observera (och kontrollräkna i exemplet ovan) att vektorn $\vec{x} \times \vec{y}$ är ortogonal mot både $\vec{x}$ och $\vec{y}$.

Kryssproduktens egenskaper:

Kryssprodukten $\vec{x} \times \vec{y}$ är en **vektor** och uppfyller för alla $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbf{R}^3$ och $t \in \mathbf{R}$:

1. $\vec{x} \times \vec{y}$ är ortogonal mot både $\vec{x}$ och $\vec{y}$
2. $\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\| \sin\theta$ där θ är vinkeln mellan dem
3. $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{x} \times \vec{y}$ bildar ett högerorienterat system
4. $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$
5. $\vec{x} \times \vec{x} = \vec{0}$
6. $\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z}$
7. $(t\vec{x}) \times \vec{y} = t(\vec{x} \times \vec{y})$

(Men generellt är $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) \neq (\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z}$)

Kryssprodukt

Vid användning av kryssprodukt är detta det centrala:

Kryssprodukten $\vec{x} \times \vec{y}$

1. är en **vektor**
2. är **ortogonal** mot både $\vec{x}$ och $\vec{y}$
3. har **längden** $\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| \sin\theta$

Kryssprodukt

Tillämpningar på area och volym:

1. Vektorerna $\vec{x}$ och $\vec{y}$ i $\mathbf{R}^3$ spänner upp en parallellogram med area $\|\vec{x} \times \vec{y}\|$

2. Vektorerna $\vec{x}$, $\vec{y}$ och $\vec{z}$ i $\mathbf{R}^3$ spänner upp en parallellepiped med volym $|\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z})|$

Lös dessa uppgifter:

1. Bestäm en ekvation för det plan i $\mathbf{R}^3$ som innehåller punkterna $P(1,0,0)$, $Q(1,1,1)$ och $R(2,3,4)$.
2. Låt linjen L ges av parameterframställningen $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Bestäm en ekvation för det plan genom origo som innehåller linjen L.
3. Låt planet Π_1 ges av ekvationen $x + y + z = 1$ och planet Π_2 av $x - 2y + 3z = 1$. Finn en parameterframställning för skärningslinjen mellan planen.

Liten rest från förra gången:

1. Beräkna avståndet från punkten $P(4,3)$ till linjen L som ges av $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Rita figur!

2. Beräkna avståndet från punkten $P(1,2,5)$ till planet med ekvation $2x + y - 2z = 10$. Vilken punkt på planet är närmast punkten P? Glöm inte att rita figur!

Seminarium

Tips inför seminariet på måndag:

Uppgifterna är många och lite halvsvåra. Ni kommer behöva lägga 6-8 timmar på att förbereda er. Gör det. Och lägg timmarna på arbete, inte på att googla. Gör så bra ni kan och gå till seminariet även om ni inte har lyckats lösa allt. Använd seminarietiden till att lära er så mycket som möjligt.