

SF1624 Algebra och geometri

Föreläsning 4

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

7 november 2016

Veckans ämne:

Linjära ekvationssystem och Gauss-Jordans metod

- Vad är ett linjärt ekvationssystem?
- Formulering på matrisform
- Gauss-Jordans lösningsmetod med 3 radoperationer
- Hur kan lösningsmängden se ut?
- Speciellt om homogena system
- Tillämpningar på linjärt oberoende, span, delrum, bas mm

Idag:

Linjära ekvationssystem och Gauss-Jordans metod

- Vad är ett linjärt ekvationssystem?
- Formulering på matrisform
- Gauss-elimination med 3 radoperationer
- Hur kan lösningsmängden se ut?

Geometriskt exempel

Vi har tre plan i $\mathbf{R}^3$:

Π_1 ges av ekvationen $2x + 4y + z = 1$

Π_2 ges av ekvationen $x - y - z = 2$

Π_3 ges av ekvationen $x + y + z = 2$

Finns det någon punkt $P(x, y, z)$ som ligger på alla tre planen?

En linjär ekvation är en ekvation på formen

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

där alla $a_1, \dots, a_n, b$ är kända tal och $x_1, \dots, x_n$ är obekanta.

Ett linjärt ekvationssystem är flera linjära ekvationer som ska lösas tillsammans, dvs man ska hitta alla $x_1, x_2, \dots, x_n$ som löser samtliga ekvationer i systemet.

Varning: Det finns massor med ekvationer och ekvationssystem som inte är linjära. Dessa måste lösas med andra metoder än den metod vi lär oss denna vecka.

Vilka av nedanstående ekvationer är linjära?

A. $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 4711$

B. $51x + \pi y = 353z$

C. $3x_1x_2 + 4x_2x_3 = 5$

D. $x + \sqrt{y} = 13$

E. $\cos^2 x_1 + \sin^2 x_2 = 1$

Ett linjärt ekvationssystem

Finn alla tal x, y, z som uppfyller att

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

Det finns tre tillåtna radoperationer:

1. Byta plats på två rader
2. Multiplicera en rad med en konstant $\neq 0$
3. Lägga en multipel av en rad till en annan rad

Målet är att få matrisen på trappstegsform:

1. Alla nollrader kommer underst i matrisen
2. När två rader som inte är nollrader står under varandra i matrisen så är det första nollskilda elementet på den övre raden till vänster om det första nollskilda elementet i den undre

Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + y + z = 6 \\ x + 2y + 3z = 4 \\ 4x - z = 11 \end{cases}$$

Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 1 \\ -4x_1 - 8x_2 + 12x_3 = -2 \end{cases}$$

Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 6x_4 = 6 \end{cases}$$

Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

Ord:

- radreduktion — göra radoperationer i en matris
- radekvivalenta matriser — man kan gå från den ena till den andra genom radoperationer
- ledande etta — ett 1 som är första nollskilda element på en rad i en trappstegsmatris
- koordinatmatris — matris med koefficienterna (utan högerledet)
- utökad matris — matris med koefficienter och högerled
- homogent system — högerledet är bara nollor
- inkonsistent system — saknar lösning

Lösningsmängden:

Ett linjärt ekvationssystem har antingen

1. Oändligt många lösningar
2. En unik lösning
3. Inga lösningar

Sats: Anta att den utökade matrisen $[A \mid \vec{b}]$ till ett linjärt ekvationssystem är radekvivalent med $[S \mid \vec{c}]$ som är i trappstegsform. Då gäller följande.

1. Det givna systemet är inkonsistent om och endast om någon rad i $[S \mid \vec{c}]$ är på formen $[0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid c]$ där $c \neq 0$.
2. Om systemet är konsistent finns två möjligheter. Antingen är antalet pivot-element i S lika med antalet obekanta och systemet har unik lösning. Eller också är antalet pivot-element i S mindre än antalet obekanta och systemet har oändligt många lösningar.

Uppgift:

För vilka tal a är ekvationssystemet lösbart? Lös systemet för dessa a !

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 6x_3 + ax_4 = 2 \end{cases}$$